

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

Tomas ULITINAS

# SFERINIO KEVALO OPTIMIZAVIMAS PRISITAIKOMUMO SĄLYGOMIS

DAKTARO DISERTACIJA

TECHNOLOGIJOS MOKSLAI,  
STATYBOS INŽINERIJA (02T)



Vilnius LEIDYKLA  
TECHNIKA 2014

Disertacija rengta 2010–2014 metais Vilniaus Gedimino technikos universitete.

### **Mokslinis vadovas**

prof. habil. dr. Juozas ATKOČIŪNAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Vilniaus Gedimino technikos universiteto Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo taryba:

### **Pirmininkas**

prof. habil. dr. Gintaris KAKLAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

### **Nariai:**

dr. Raimondas BLIŪDŽIUS (Kauno technologijos universitetas, statybos inžinerija – 02T),

prof. dr. Donatas ČYGAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, statybos inžinerija – 02T),

prof. habil. dr. Rimantas KAČIANAUSKAS (Vilniaus Gedimino technikos universitetas, mechanikos inžinerija – 09T),

prof. dr. Zdeněk KALA (Brno technologijos universitetas, statybos inžinerija – 02T).

Disertacija bus ginama viešame Statybos inžinerijos mokslo krypties disertacijos gynimo tarybos posėdyje **2015 m. sausio 28 d. 14 val.** Vilniaus Gedimino technikos universiteto senato posėdžių salėje.

Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva.

Tel.: (8 5) 274 4956; faksas (8 5) 270 0112; el. paštas doktor@vgtu.lt

Pranešimai apie numatomą ginti disertaciją išsiųsti 2014 m. gruodžio 23 d.

Disertaciją galima peržiūrėti interneto svetainėje <http://dspace.vgtu.lt/> ir Vilniaus Gedimino technikos universiteto bibliotekoje (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lietuva).

VGTU leidyklos TECHNIKA 2306-M mokslo literatūros knyga

ISBN 978-609-457-757-4

© VGTU leidykla TECHNIKA, 2014

© Tomas Ulitinas, 2014

*tomas.ulitinas@vgtu.lt*

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Tomas ULITINAS

# OPTIMAL SHAKEDOWN DESIGN OF SPHERICAL SHELL

DOCTORAL DISSERTATION

TECHNOLOGICAL SCIENCES,  
CIVIL ENGINEERING (02T)



Vilnius LEIDYKLA  
TECHNIKA 2014

Doctoral dissertation was prepared at Vilnius Gediminas Technical University in 2010–2014.

### **Supervisor**

Prof Dr Habil Juozas ATKOČIŪNAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

The Dissertation Defense Council of Scientific Field of Civil Engineering of Vilnius Gediminas Technical University:

### **Chairman**

Prof Dr Habil Gintaris KAKLAUSKAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T).

### **Members:**

Dr Raimondas BLIŪDŽIUS (Kaunas University of Technology, Civil Engineering – 02T),

Prof Dr Donatas ČYGAS (Vilnius Gediminas Technical University, Civil Engineering – 02T),

Prof Dr Zdenek KALA (Brno University of Technology, Civil Engineering – 02T),

Prof Dr Habil Rimantas KAČIANAUSKAS (Vilnius Gediminas Technical University, Mechanical Engineering – 09T).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Dissertation Defense Council of Civil Engineering in the Senate Hall of Vilnius Gediminas Technical University at **2 p. m. on 28 January 2015**.

Address: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania.

Tel.: +370 5 274 4956; fax +370 5 270 0112; e-mail: doktor@vgtu.lt

A notification on the intend defending of the dissertation was send on 23 December 2014.

A copy of the doctoral dissertation is available for review at the Internet website <http://dspace.vgtu.lt/> and at the Library of Vilnius Gediminas Technical University (Saulėtekio al. 14, LT-10223 Vilnius, Lithuania).

# Reziumė

Disertaciniame darbe nagrinėjami tampriai-plastinių prisitaikančių sferinių kevalų, veikiamų kartotinės-kintamosios apkrovos (KKA, žinomos tik jėgų kitimo ribos) optimizavimo uždaviniai, taikant energinius principus, netiesinį matematinį programavimą, skaitinius mechanikos metodus. Sferinio kevalo diskretizacijai taikomas pusiausvirųjų baigtinių elementų (PBE) metodas, esant mažų poslinkių prielaidai. Optimizavimo uždavinių matematinių modelių pagrindas yra tampriai-plastinių sferinių kevalų prisitaikomumo būvio įrašų ir deformacijų analizės uždavinio pilnutinė lygčių ir priklausomybių sistema. Optimizavimo uždaviniuose šalia takumo sąlygų (saugos ribinis būvis), įvedami prisitaikomumo poslinkių ribojimai (tinkamumo ribinis būvis).

Disertaciją sudaro įvadas, trys skyriai, bendrosios išvados, naudotos literatūros sąrašas, autoriaus publikacijų disertacijos tema sąrašai ir 5 priedai.

Įvadiniamе skyriuje aptariama tiriamoji problema, darbo aktualumas, tyrimų metodika bei darbo tikslas ir iškelti uždaviniai. Skyriaus pabaigoje pristatomi disertanto pranešimai konferencijose bei pačios disertacijos struktūra ir apimtys.

Pirmajame skyriuje atlikta mokslo literatūros disertacijos tema analitinė apžvalga. Kartu čia grindžiama ir disertacijos autoriaus sferinių kevalų optimizavimo prisitaikomumo būvyje metodika: diskretizacijos problemos, energiniai mechanikos principai, matematinis programavimo taikymas. Skyriaus pabaigoje daromos išvados apie disertacinio darbo aktualumą, keliamus tikslus ir uždavinius.

Antrajame skyriuje teikiama sferinio kevalo diskretizacija PBE: pagrindinių lygčių ir priklausomybių matricinių išraiškų sudarymo metodika, detalizuojama tamprių kevalų skaičiavimas, atliekama lyginamoji analizė su kitų autorių moksliniais darbais. Sudaromi kevalo plastinio būvio įtempių ir deformacijų uždavinių matematiniai modeliai. Skyriaus pabaigoje pateikiamos išvados apie PBE taikymą skaičiuojant kevalus, jų naudingumą.

Trečiajame skyriuje realizuojamas prisitaikiusio sferinio kevalo ribinės įrašos optimalaus pasiskirstymo uždavinys ribojant poslinkius. Atlikta įtempių ir deformacijos būvių analizė, nustatytas galimų poslinkių ribos, kai medžiaga tampriai-plastinė. Skyriaus pabaigoje pateikiamos išvados apie disertanto sukurtą sferinio kevalo optimizavimo prisitaikomumo sąlygomis metodiką.

Disertacijos tematika paskelbti 7 straipsniai: trys – *ISI Web of Science* leidiniuose; vienas – *ISI proceeding* tarptautinės konferencijos medžiagoje, du – tarptautinių duomenų bazių leidiniuose, vienas – recenzuojame mokslo leidinyje, konferencijos pranešimų medžiagoje. Disertacijos tema perskaityti 4 pranešimai: du Lietuvos ir kiti du tarptautinėse konferencijose.

# Abstract

Optimization problem elastic-plastic spherical shell at shakedown using energy principles, the nonlinear mathematical programming, numerical methods of mechanics are analyzed affected by repeated-variable load (RVL) in the dissertation. Equilibrium finite element method applied to discretization of spherical shell under the assumption of small displacements. Complete equations system of internal forces and deformation analysis problem of elastic-plastic spherical shells at shakedown state is basis of mathematical models of optimization problems. The limits of displacement (serviceability limit state) at shakedown input near the yield conditions (ultimate limit state) in the optimization problems.

The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusions and suggestions, references, author of publications on the dissertation topic and annexes.

Research problem, topicality of the work, research methodology, goal of the task are discussed in the introductory chapter. Doctoral student publications, conferences and dissertation structure and chapters volumes are presented in the end of chapter.

An analytical review of the science literature dissertation topic was performed in the first chapter. The optimization of spherical shells are analyzed at shakedown state: discretization problem, principles of mechanic's energy principles, application of the mathematical programming. Conclusions about the dissertation objectives actuality are made in the end of chapter.

In the second chapter discretization of spherical shell is developed equilibrium finite element: the basic equations and matrix expression dependency methodologies, performed a comparative analysis. Also the calculation of elastic shells are detailed. After that the mathematical models of the stress and strain state are formulated acting single load. Conclusions about equilibrium finite elements usefulness by calculating shells are made in the end of chapter.

In the third chapter the minimum limit internal force problem and its distribution of spherical shell, at shakedown are realized, when displacements are restricted. Stress and strain analysis are performed, possible displacements limits are set, when the material is elastic-plastic. Conclusions are made about dissertation author created methodology for spherical shell optimization at shakedown state in the end of chapter.

7 articles have been published on themes of the dissertation: 3 in *ISI Web of Science database*, 1 in *ISI proceeding* conference materials, 2 in other database, 1 in international conference database. Dissertation approved in the 4 scientific conferences, including two international.

---

# Žymėjimai

## Simboliai

- $\mathbf{A}$  – kevalo diskretinio modelio pusiausvyros lygčių koeficientų matrica;  
 $\bar{\mathbf{A}} = \text{diag} \mathbf{A}_k$  – kvazidiagonalinė matrica, kurios diagonalinius blokus yra matricos  $\mathbf{A}_k$  ;  
 $2b_k$  –  $k$ -ojo žiedinio baigtinio elemento plotis;  
 $\mathbf{B}_k$  – kevalo  $k$ -ojo elemento poslinkių darnos matrica;  
 $C$  – plastiškumo konstanta;  
 $d_{std}$  – standaus disko skersmuo;  
 $\mathbf{d}_k$  – be galo mažo kevalo elemento pasiduodamumo matrica;  
 $\mathbf{D}$  – kvazidiagonalinė kevalo baigtinių elementų pasiduodamumų matrica;  
 $\mathbf{D}_k$  –  $k$ -ojo baigtinio elemento pasiduodamumo matrica;  
 $E$  – tamprumo (Jungo) modulis;  
 $\mathbf{F}_{inf}, \mathbf{F}_{sup}$  – išorinių apkrovų  $\mathbf{F}(t)$  viršutinių ir apatinių kitimo ribų vektoriai;  
 $F$  – išorinė sutelktoji jėga;  
 $F_{n,c}$  – žiede  $\rho_c$  paskirstytos normalinės apkrovos intensyvumas;  
 $\mathbf{F}$  – išorinių apkrovų vektorius pusiausvyros lygtyse  $\mathbf{AS} = \mathbf{F}$  ;  
 $f_y$  – plieno takumo riba;  
 $\Phi$  – Mizeso plastiškumo kriterijaus sąlygų matrica;  
 $\mathbf{G}_k(\xi_k)$  – elemento įtakinių funkcijų matrica;  
 $\bar{\mathbf{G}}$  – tampaiai-plastinio diskretizuoto sferinio kevalo skaičiavimo liekamųjų įrašų influentinė matrica;

$h_k$  –  $k$ -ojo baigtinio elemento storis;

$\mathbf{H}_k(\xi_k)$  – baigtinio elemento metodo įrašų interpoliacinė matrica;

$\overline{\mathbf{H}}$  – tampriai-plastinio diskretizuoto sferinio kevalo skaičiavimo liekamųjų poslinkių influentinė matrica;

$\mathbf{K}$  – visos kevalinės konstrukcijos standumo matrica;

$L$  – sferinio kevalo pagrindo plotis;

$\mathbf{L}$  – baigtinių elementų plotų vektorius;

$m$  – kevalo diskretinio modelio pusiausvyros lygčių skaičius (laisvumo laipsnis);

$M_\rho$  – kevalo radialinis lenkimo momentas;

$M_\varphi$  – kevalo žiedinis lenkimo momentas;

$n$  – kevalo diskretinio modelio pusiausvyros lygčių nežinomųjų skaičius;

$N_\rho$  – kevalo radialinė ašinė jėga;

$N_\varphi$  – kevalo žiedinė ašinė jėga;

$\mathbf{N}_0$  – kevalo membraninių ribinių ašinių jėgų vektorius;

$q$  – normalinės tolygiai paskirstytos apkrovos intensyvumas;

$Q_\rho$  – kevalo skersinė jėga;

$R_0$  – sferinio kevalo kreivumo spindulys;

$r$  – sferinio kevalo pagrindo spindulys;

$r_{std}$  – standaus disko spindulys;

$\mathbf{S}$  – diskretizuoto sferinio kevalo suminių įrašų vektorius ( $\mathbf{S} = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_r$ );

$\mathbf{S}_e$  – tampraus diskretizuoto sferinio kevalo skaičiavimo įrašų vektorius ( $\mathbf{S}_e = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{F}$ );

$\mathbf{S}_r$  – tampriai-plastinio diskretizuoto sferinio kevalo liekamųjų įrašų vektorius;

$\mathbf{u}_{r,inf}, \mathbf{u}_{r,sup}$  – pagrindinių mazgų liekamųjų poslinkių viršutinių ir apatinių kitimo ribų vektoriai;

$\mathbf{u}$  – diskretizuoto sferinio kevalo suminių poslinkių vektorius ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_r$ );

$\mathbf{u}_e$  – tampraus diskretizuoto sferinio kevalo skaičiavimo poslinkių vektorius  
( $\mathbf{u}_e = \boldsymbol{\beta}\mathbf{F}$ );

$\mathbf{u}_r$  – tampriai-plastinio diskretizuoto sferinio kevalo liekamųjų poslinkių vektorius;

$u_{i0}$  – liekamųjų poslinkių greičiai;

$\boldsymbol{\alpha}$  – tampraus kevalo skaičiavimo įrašų influentinė matrica;

$\varepsilon_{ij,0}''$  – kinematiškai leistinas plastinių deformacijų laukas;

$\boldsymbol{\beta}$  – tampraus kevalo skaičiavimo poslinkių influentinė matrica;

$\boldsymbol{\varphi}$  – takumo sąlygų reikšmių vektorius;

$\sigma$  – leistinas įtempių būvis;

$\sigma_{ij}^{(e)}$  – kintamieji įtempiai;



$\Theta_p$  – diskretinio kevalo plastinių deformacijų vektorius;  
 $\Theta_r$  – diskretizuoto sferinio kevalo liekamųjų deformacijų vektorius;  
 $\lambda$  – plastinių daugiklių vektorius;  
 $\rho, \varphi, z$  – globalinės koordinatžių sistemos ašys;  
 $\rho_{ij}$  – nepriklausantys nuo laiko liekamieji įtempiai;  
 $\rho_{k,2}$  –  $k$ -ojo elemento antrojo mazgo koordinatė;  
 $\tau$  – kartotinės-kintamosios apkrovos komponentų skaičius;  
 $\xi$  – lokalioji koordinatžių sistemos ašis;  
 $\nu$  – Puasono koeficientas;  
 $\mathcal{A}$  – diferencialinis pusiausvyros lygčių operatorius;  
 $\mathcal{F}'$  – prisitaikomumo būvio papildoma deformavimo energija;  
 $\mathcal{F}''$  – prisitaikomumo būvio pilnutinė potencinė energija;  
 $\mathcal{M}$  – galimoji apkrovimo sritis;  
 $\nabla \mathcal{F}$  – funkcijos  $\mathcal{F}$  gradientas.

## Santrumpos

PBE – pusiausvirieji baigtiniai elementai;  
 KKA – kartotinė-kintamoji apkrova;  
 IDB – įtempių ir deformacijų būvis.



---

# Turinys

IVADAS .....	1
Problemos formulavimas.....	1
Darbo aktualumas.....	2
Tyrimų objektas.....	2
Darbo tikslas.....	2
Darbo uždaviniai .....	2
Tyrimų metodika .....	3
Darbo mokslinis naujumas .....	3
Darbo rezultatų praktinė reikšmė .....	3
Ginamieji teiginiai.....	4
Darbo rezultatų aprobavimas.....	4
Disertacijos struktūra.....	4
Padėka .....	5
1. SFERINIŲ KEVALŲ OPTIMIZAVIMO PRISITAIKOMUMO SĄLYGOMIS MOKSLINĖS LITERATŪROS ANALITINĖ APŽVALGA.....	7
1.1. Įvadinės prisitaikomumo teorijos pastabos.....	8
1.2. Prisitaikančių konstrukcijų mechanikos energiniai principai .....	10
1.3. Prisitaikančių konstrukcijų analizė baigtinių elementų metodu .....	14
1.3.1. Bendros žinios.....	14
1.3.2. Bendros pastabos apie baigtinių elementų tikslumą.....	16
1.3.3. Pusiausvirųjų baigtinių elementų metodas .....	18
1.4. Plonasieniai sferiniai kevalai .....	20
1.5. Sferinių kevalų optimizacija ir kompiuterinės technologijos .....	21
1.6. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas .....	22
2. SFERINIŲ KEVALŲ DISKRETIZACIJA PUSIAUSVIRAIS BAIGTINIAIS ELEMENTAIS .....	25

2.1. Pradinės pastabos ir prielaidos .....	26
2.2. Bendros žinios apie sferinio kevalo diskretinį modelį.....	26
2.3. Sferinio kevalo diskretizacija pusiausvrais baigtiniais elementais .....	28
2.4. Pusiausvirojo baigtinio elemento priklausomybės ir matricos .....	32
2.5. Sferinio kevalo lygčių diskretizavimas.....	38
2.6. Tampraus sferinio kevalo įrašų ir deformacijų pasiskirstymas .....	39
2.6.1. Tampraus sferinio kevalo matematiniai modeliai .....	39
2.6.2. Tampraus kevalo įrašų skaitinė analizė .....	41
2.6.3. Tampraus kevalo skaičiavims: standaus disko įtaka .....	44
2.6.4. Skaitinių eksperimentų lyginamoji analizė .....	50
2.7. Sferinių kevalų optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai .....	52
2.7.1. Tampriai-plastinių sferinių kevalų takumo sąlygos .....	53
2.7.2. Ribinės pusiausvyros (apkrovos) optimizavimo ir analizės uždaviniai...	53
2.7.3. Skaičiuojamųjų uždavinių tyrimai .....	55
2.8. Antrojo skyriaus išvados .....	58
<b>3. SFERINIŲ KEVALŲ PRISITAIKOMUMO BŪVIO ANALIZĖ IR</b>	
<b>OPTIMIZAVIMAS RIBOJANT POSLINKIUS .....</b>	<b>59</b>
3.1. Bendrosios pastabos .....	60
3.2. Tampriai-plastinio pristaikančio sferinio kevalo takumo sąlygos .....	63
3.3. Haro ir Karmano principas nenusikraunančiai konstrukcijai.....	64
3.4. Ciklinės plastinės suirties uždavinio matematinis modelis.....	64
3.5. Prisitaikiusio kevalo įtempių ir deformacijų būvio analizės uždavinys.....	67
3.6. Prisitaikiusio sferinio kevalo optimizavimo uždavinys ribojant poslinkį .....	71
3.6.1. Skaitinis prisitaikiusio sferinio kevalo optimizavimo uždavinio	
ribojant poslinkius pavyzdys .....	72
3.6.2. Prisitaikiusio sferinio kevalo skaitinys pavyzdys esant pastoviam	
skerspjūviui.....	76
3.7. Trečiojo skyriaus išvados .....	78
<b>BENDROSIOS IŠVADOS .....</b>	<b>79</b>
<b>LITERATŪRA IR ŠALTINIAI.....</b>	<b>81</b>
<b>AUTORIAUS MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ DISERTACIJOS TEMA SĄRAŠAS ....</b>	<b>89</b>
<b>SUMMARY IN ENGLISH.....</b>	<b>91</b>
<b>PRIEDAI<sup>1</sup> .....</b>	<b>113</b>
A priedas. Tampraus kevalo skaičiavimo uždavinių sprendimo rezultatai.....	115
B priedas. Tampriai-plastinio kevalo skaičiavimo uždavinių sprendimo rezultatai	161
C priedas. Prisitaikiusio sferinio kevalo uždavinių sprendimo rezultatai .....	167
D priedas. Bendra autorių sutikimai teikti publikacijose skelbtą medžiagą	
mokslo daktaro disertacijoje.....	191
E priedas. Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos .....	197

---

<sup>1</sup>Priedai pateikiami pridėtoje kompaktinėje plokštelėje

---

# Contents

INTRODUCTION .....	1
Problem formulation .....	1
Relevance of the thesis .....	2
Research objects .....	2
Aim of the thesis .....	2
Task of the thesis .....	2
Research methodology .....	3
Scientific value of the research findings .....	3
Practical significance of the results .....	3
Defended statement .....	4
Approval of the research findings .....	4
Structure of the thesis .....	4
Acknowledgement .....	5
1. AN ANALYTICAL REVIEW OF SCIENTIFIC LITERATURE OF SPHERICAL SHELLS OPTIMIZATION AT SHAKEDOWN .....	7
1.1. Initial remarks and assumptions .....	8
1.2. Principles of mechanic energy of shakedown structures .....	10
1.3. Aanalysis of shakedown structures by finite elements method .....	14
1.3.1. General knowledge .....	14
1.3.2. General remarks about the accuracy of the finite element .....	16
1.3.3. Equilibrium finite element method .....	18
1.4. Thin-walled spherical shells .....	20
1.5. Optimization and computer aided technology of spherical shells .....	21
1.6. Conclusions of chapter 1 and formulating tasks for the dissertation .....	22
2. DISCRETIZATION OF SPHERICAL SHELLS BY EQUILIBRIUM FINITE ELEMENTS .....	25

2.1. Initial remarks and assumptions .....	26
2.2. General knowledge about the spherical shell discrete model .....	26
2.3. Discretization of spherical shell by equilibrium finite elements .....	28
2.4. Dependencies and matrices of equilibrium finite element.....	32
2.5. Discretization of spherical shells equations.....	38
2.6. Distribution of internal forces and displacements of elastic spherical shell .....	39
2.6.1. Mathematical models of elastic spherical shells .....	39
2.6.2. Numerical analysis of internal forces of elastic shell .....	41
2.6.3. Calculation of elastic shell: rigid disk influence .....	44
2.6.4. Comparative analysis of numerical experiments.....	50
2.7. Mathematical models for optimization of spherical shells .....	52
2.7.1. Elastic-plastic yield condition for spherical shells .....	53
2.7.2. Ultimate limit state (load) problems of optimization analysis .....	53
2.7.3. Research of calculation problems .....	55
2.8. Conclusions of chapter 2 .....	58
3. ANALYSIS AND OPTIMIZATION AT SHAKEDOWN STATE OF SPHERICAL SHELLS UNDER DISPLACEMENT CONSTRAINTS .....	59
3.1. General remarks .....	60
3.2. Yield condition of elastic-plastic spherical shells at shakedown state.....	63
3.3. Haar-Karman principle for unloading construction.....	64
3.4. Mathematical models of problem of cycle-plastic collapse.....	64
3.5. Analysis problem of stress and strain state of shakedown-shell.....	67
3.6. Optimization problem of shakedown-spherical shell under displacement constraints.....	71
3.6.1. Numerical example of shakedown-spherical shell under displacement constraints.....	72
3.6.2. Numerical example of shakedown-spherical shell at constant cross-section .....	76
3.7. Conclusions of chapter 3 .....	78
GENERAL CONCLUSIONS .....	79
REFERENCES .....	81
THE LIST OF SCIENTIFIC PUBLICATIONS BY THE AUTHOR ON THE SUBJECT OF THE DISSERTATION .....	89
SUMMARY IN ENGLISH.....	91
ANNEXES <sup>1</sup> .....	113
Annex A. Results of calculation task of elastic spherical shell .....	115
Annex B. Results of calculation task of elastic-plastic spherical shell.....	161
Annex C. Results of calculation task of spherical shell at shakedown state.....	167
Annex D. Agreements of co-authors to provide published material in the thesis ...	191
Annex E. Copies of the scientific publications by the author on the topic of the dissertation.....	197

---

<sup>1</sup> Annexes are provided in the attached compact disk (CD)

---

# Ivadas

## Problemos formulavimas

Statybinės mechanikos konstrukcijų optimizavimo uždaviniai, atsižvelgiant į pagrindines stiprumo (takumo) sąlygas, standumo ir stabilumo apribojimus yra konstrukcijų projektavimo uždavinių pagrindas. Konstrukcijų medžiagos savybių, apribojimų ir poveikių gausa skatina naujų statybinės mechanikos metodų kūrimą. Šiame disertaciniame darbe nagrinėjamos plieninės kevalinės konstrukcijos su galimomis, kintamomis laike  $t$  plastinėmis deformacijomis – atsiranda terpė nagrinėti prisitaikomumo reiškinį. Kai apkrova kartotinė, konstrukcija gali išeiti iš rikiuotės dėl susikaupusių per didelių plastinių deformacijų ar dėl atsivėrusių plyšių. Tačiau konstrukcijai įmanoma, atsiradus pradinėms plastinėms deformacijoms, „susikurti“ tokį įtempių būvį, kuris niekur neišeina už leistinųjų ribų. Toks atvejis yra vadinamas konstrukcijų prisitaikomumu prie duotosios apkrovos. Prisitaikomumo reiškinį nagrinėti klasikiniiais metodais įmanoma tik itin paprastas konstrukcijas. Todėl statybos inžinerijos teorijai ir praktikai labai aktuali disertacijos tema apie tampriai-plastinių prisitaikančių kevalinių konstrukcijų nagrinėjimą šiuolaikiniais skaitiniais, matematinio programavimo metodais. Sferinio kevalo analizės bei optimizavimo uždavinių formulavimas pagrįstas ekstreminiais energiniais principais ir matematinio programavimo teorija, kaip rodo mokslo literatūros analizė, yra perspektyvus.

## Darbo aktualumas

Prisitaikomumo teorijos metodų taikymas kevalinių konstrukcijų analizėje ir optimaliame projektavime yra nauja kryptis rezervuarinių indų ir apskritai statybinių konstrukcijų skaičiavimo ir projektavimo praktikoje. Todėl disertaciniame darbe sudarytas prisitaikiusio sferinio kevalo optimizacijos matematinis modelis, įvertinant stiprumo (takumo) ir standumo apribojimus. Tai netiesinio matematinio programavimo uždavinys. Kevalo diskretizacijai pasitelkiami pusiausviri baigtiniai elementai (PBE), kurių taikymas mokslinėje literatūroje dar nėra pakankamai išvystyti. Darbo aktualumą didina autoriaus patobulintos pusiausvirų baigtinių elementų metodikos taikymas ne tik tamprios, bet ir plastinės kevalų darbo stadijos analizėje.

## Tyrimų objektas

Disertaciniame darbe nagrinėjami prisitaikiusio sferinio kevalo analizės ir optimizacijos uždavinių matematiniai modeliai ribojant poslinkius. Optimizavimo uždavinių diskretiniai matematiniai modeliai sudaromi pusiausvirųjų baigtiniu elementu metodu. Tiriamas energinių principų bei inovatyviųjų kompiuterinių technologijų plėtojimas ir taikymas sferinių kevalų skaičiavimuose.

## Darbo tikslas

Sudaryti tampriai-plastinių prisitaikančių sferinių kevalų analizės ir optimizavimo uždavinio matematinius modelius, jų sprendimo algoritmus, atsižvelgiant į saugos ir tinkamumo ribinius būvius bei konstrukcinius apribojimus.

## Darbo uždaviniai

Darbo tikslui pasiekti reikia išspręsti šiuos iškeltus uždavinius:

1. Sudaryti šiuolaikinės prisitaikomumo teorijos bendrųjų mokslinių tendencijų santrauką.
2. Atlikti literatūros apie sferinių kevalų skaičiavimą (tamprį, tamprį-plastinę darbo stadiją) analitinę apžvalgą.
3. Plėtoti konstrukcijos diskretizacijos pusiausvirais baigtiniais elementais metodiką.
4. Sudaryti tampraus sferinio kevalo skaičiavimo uždavinio matematinį modelį. Gautas tampraus sferinio kevalo įrašas ir poslinkius palyginti su



mokslinėje literatūroje pagal analitines išraiškas bei skaitines formuluotes gautais rezultatais.

5. Sudaryti tampriai-plastinių prisitaikiusių sferinių kevalų analizės ir optimizavimo uždavinių matematinius modelius ir atlikti skaitinį prisitaikiusio lėkšto sferinio kevalo optimizavimo uždavinio, ribojant poslinkius, eksperimentą.
6. Sukurti skaičiavimo algoritmą deformacijų ir įtempių būviui nustatyti bei optimizavimo uždaviniams su įvairiais optimalumo kriterijais spręsti.

## Tyrimų metodika

Metodika grindžiama skaitiniais mechanikos metodais, energiniais principais, matematinio programavimo teorija. Prisitaikomumo analizėje naudojamos statistškai galimos įrašos: PBE įgalina gauti tikslesnį jų pasiskirstymą lyginant su kitais skaitiniais metodais. Atliktuose tyrimuose skaitinių eksperimentų rezultatai gauti laikantis mažų poslinkių prielaidos.

## Darbo mokslinis naujumas

Sukurti prisitaikančių sferinių kevalų tikrinamojo ir projekcinio netiesinių optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai įvertinant stiprumo (takumo) sąlygas bei standumo apribojimus (saugos ir tinkamumo ribiniai būviai). Įrodyta, kad liekamieji poslinkiai prisitaikymo proceso metu kinta nemonotoniškai. Atskleista liekamųjų deformacijų darnos lygčių taikymo galimybė, formuojant naujus liekamųjų poslinkių kitimo ribų skaičiavimo uždavinių matematinius modelius.

Pasiūlytas prisitaikiusių sferinių kevalų optimizavimo uždavinio matematinio modelio skaičiavimo algoritmas, kuris atitinka saugos ir tinkamumo ribinius būvius. Sukurta metodika leidžia greičiau ir efektyviau spręsti netiesinius matematinio programavimo uždavinius *MATLAB* aplinkoje.

## Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Sukurti nauji prisitaikančių sferinių kevalų optimizavimo algoritmai ir matematiniai modeliai atsižvelgiant į stiprumo, standumo bei konstrukcinius apribojimus. Prisitaikomumo teorijos įdiegimas į sferinių kevalų optimizavimo uždavinių formuluotes atveria perspektyvas įdiegti projektavimo praktiką į erdvinės konstrukcijos.

## Ginamieji teiginiai

1. Prisitaikančių kevalinių konstrukcijų analizės uždavinio statinėje formuluotėje, kai liekamosios įrašos turi būti statiškai galimos, racionaliausia taikyti pusiausvurus baigtinius elementus.
2. Prisitaikomumo būvio Oilerio ir Lagranžo lygtys gali būti gaunamos iš dualių analizės uždavinio formuluočių.
3. Optimizavimo uždavinio sąlygomis-apribojimais gali būti naudojamos Oilerio ir Lagranžo lygtys, papildytos kevalo tinkamumo ribinio būvio sąlygomis.
4. Matematinio programavimo griežtumo sąlyga įtakoja kevalo tinkamumo ribinio būvio įvertinimo tikslumą.
5. Mechanikos ekstreminiai energiniai principai, matematinio programavimo teorija, pusiausvirieji baigtiniai elementai gali formuoti darnią ir perspektyvią praktikai prisitaikančių kevalų optimizavimo metodiką.

## Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos tematika paskelbti 7 straipsniai recenzuojamuose mokslo žurnaluose. Autoriaus publikacijų sąrašas pateiktas 89 puslapyje.

Disertacijoje atliktų tyrimų rezultatai buvo aprobuoti 4 mokslinėse konferencijose:

- Jaunųjų mokslininkų konferencijoje „*Mokslas – Lietuvos ateitis*“ 2010 m. Vilniuje.
- Jaunųjų mokslininkų konferencijoje „*Mokslas – Lietuvos ateitis*“ 2012 m. Vilniuje.
- Tarptautinėje mokslinėje konferencijoje „*Modern building materials, structures and techniques*“ 2013 m. Vilniuje.
- Tarptautinėje mokslinėje konferencijoje „*Mendel 2013: 19th international conference of soft computing*“ 2013 m. Brno, Čekijos Respublika.

## Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, 3 skyriai, bendrosios išvados, 113 literatūros šaltinių sąrašas, autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tematika sąrašas. Disertacijos pabaigoje pateikta santrauka anglų kalba ir 5 priedai.

Darbo apimtis su santrauka – 113 puslapių, neskaitant priedų. Tekste panaudota: 121 numeruota formulė, 39 paveikslai, 11 lentelių.

## **Padėka**

Nuoširdžiai dėkoju vadovui prof. habil. dr. Juozui Atkočiūnui, atskleidusiam man prisitaikumo teorijos principus ir metodus. Nuoširdus ačiū ir magistrantūros studijų vadovui prof. dr. Stanislovui Kalantai, konsultavusiam mane doktorantūros studijų metu. Taip pat dėkoju kolegoms iš Brno technologijų univeriteto, kurie konsultavo stažuotės metu.

Dėkoju VGTU Statybinės mechanikos katedros kolegoms už bendradarbiavimą, idėjas ir konsultacijas.



---

## **Sferinių kevalų optimizavimo prisitaikomumo sąlygomis mokslinės literatūros analitinė apžvalga**

Šiame skyriuje išanalizuota prisitaikomumo teorijos raida, taikant ją tamprių, tampriai-plastinių kontinualių konstrukcijų darbo analizei ir optimaliam projektavimui. Tai privalu atlikti konstrukcijų saugos požiūriu, nes statybinės konstrukcijos dažnai patiria poveikius, kai apkrovos istorija yra beveik nežinoma arba yra aiškus ciklinės apkrovos poveikis. Esant tokiems poveikiams, laikoma, kad tokia apkrova yra kartotinė-kintamoji (KKA). Skyriuje aptarti bendrieji prisitaikančių konstrukcijų mechanikos energiniai principai. Taip pat plėtojamas pusiausvirųjų baigtinių elementų (PBE) metodas, kuris leidžia gerokai tiksliau aprašyti statiškai galimų liekamųjų įrąžų būvį.

Skyriaus tematika yra paskelbti (kartu su bendraautoriais) 3 straipsniai (Ulitas *et al.* 2010; Kalanta *et al.* 2012 b; Ulitas 2013) ir perskaityti du pranešimai. Vienas jaunųjų mokslininkų konferencijoje „*Mokslas – Lietuvos ateitis*“ 2010 m. Vilniuje, o kitas tarptautinėje konferencijoje „*Mendel 14: 19th International Conference on Soft Computing*“ 2013 m. Brno, Čekijos Respublika.

## 1.1. Įvadinės prisitaikomumo teorijos pastabos

Dažnai statybinės konstrukcijos patiria poveikius su aiškiais, jų kitimo laike  $t$ , cikliškumo požymiais. Disertaciniame darbe tokią apkrovą laikysime KKA: tai sistema jėgų, kurių kiekviena ar jų grupės gali kisti duotose ribose nepriklausomai viena nuo kitos. Konstrukcijų, galinčių patirti plastinį deformavimą, įtempių ir deformacijų būvis priklauso nuo apkrovimo istorijos. Todėl tampriai-plastinių konstrukcijų, veikiamų KKA, skaičiavimas sudėtingas, ypač jei apkrova apibrėžiama tik jos kitimo ribomis. Kai apkrova kartotinė-kintamoji, konstrukcija gali patirti ciklinę plastiškąją suirtį dėl susikaupusių plastinių deformacijų arba dėl kintamojo plastiškumo (net tada, kai bet kurios iš apkrovų kombinacijų poveikis pats savaime nėra pavojingas plastinio suirimo prasme). Išskiriamas ir trečias atvejis, kai pradinėse apkrovimo stadijose atsiradusios plastinės deformacijos sukelia liekamąsias įrašas (įtempius), kurios užtikrina tolimesnių apkrovimo programų eigoje jau tik tamprų konstrukcijos darbą. Toks reiškinys vadinamas konstrukcijų prisitaikomumu (anglų k. „*shakedown*“). Jis ir yra šios disertacijos nagrinėjimo objektas.

Prisitaikomumo teorijos raidos pradžia siejama su Griuningo (Martin Grüning, 1869–1932) vardu, kurio vienas iš straipsnių (Grüning 1926), paskelbtų dar 1926 metais, buvo skirtas santvarinių sistemų plastiškumo savybių įtakos jų įtempių ir deformacijų analizei, kai apkrova yra kartotinė. Tolimesnė plastinių konstrukcijų skaičiavimo metodų raida siejama su Bleicho (Haus Heinrich Bleich, 1909–1985) vardu. Jis 1932 m. įvedė ir terminą „*prisitaikomumo teorija*“ (Bleich 1932). Melanas (Ernst Melan, 1890–1963) 1938 metais apibendrino Griuningo ir Bleicho tyrimus, suformuluodamas konstrukcijos prisitaikomumo prie kartotinės-kintamos apkrovos teoremą būtinajam prisitaikomumo būvio kriterijui (Melan 1938). Ji teigia, kad *konstrukcija prisitaikys, jeigu kiekviename kūno taške egzistuoja nepriklausantys nuo laiko liekamieji įtempiai  $\rho_{ij}$  tokie, kad jų suma su kintamąja įtempių dalimi  $\sigma_{ij}^{(e)}$  sudaro leistiną įtempių būvį  $\sigma$ , esant visoms apkrovų, kintančiu duotose ribose, kombinacijoms*. Ši teorema tapo pirmąja klasikine (statine) prisitaikomumo arba Melano teorema. Statiškai leistini liekamieji įtempiai tenkina stiprumo (takumo) ir pusiausvyros sąlygas:

$$f(\sigma_{ij}^{(e)} + \rho_{ij}) < 0, \quad (1.1)$$

$$\rho_{ij,j} = 0, \quad \rho_{ij} u_j = 0. \quad (1.2)$$

Čia  $f(\sigma_{ij}) = 0$  – takumo paviršiaus lygtis. Taigi, jeigu tenkinamos (1.1)–(1.2) sąlygos, tai konstrukcija prisitaikys. Formulų (1.1)–(1.2) pažymėjimai yra susieti su anksčiau minėtu darbu (Melan 1938).

Konstrukcijos neprisitaikomumo sąlygas suformulavo Koiteris (Tjardus Koiter, 1915–1997) (Koiter 1960) (formuluotė tapo antrąja teorema). Koiterio neprisitaikomumo (kinematinė) teorema teigia: *tampriai-plastinė konstrukcija, veikama kintančios laike apkrovos, suirs tuo atveju, jei egzistuoja kinematiškai leistinų greičių laukas, kuriam išorinių jėgų galingumas viršija maksimaliai galimą energijos disipaciją. Tuo būdu prisitaikomumas neįmanomas, jeigu galioja nelygybė:*

$$\int_0^{\tau} \left\{ \int X_i u_{i0} dV + \int_{S_p} q_i u_{i0} dS \right\} d\tau > \int_0^{\tau} d\tau \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,0}'' dV. \quad (1.3)$$

Čia  $\varepsilon_{ij,0}''$  – kinematiškai leistinas plastinių deformacijų laukas;  $u_{i0}$  – liekamųjų poslinkių greičiai;  $X_i, q_i$  – tūrinės ir paviršinės apkrovos.

Majeris (Guilio Maier, 1931) įrodė (Maier 1970), jog egzistuoja aiškus dualus ryšys tarp statinės ir kinematinės sprendimo uždavinių formuluočių.

Klasikiniai Melano ir Koiterio kriterijai atsižvelgia į prielaidą apie idealų medžiagos plastiškumą ir iškylą takumo paviršių, asociatyvinio tekėjimo dėsnio priklausomybes, deformacijų mažumą ir dinaminių reiškinių nepaisymą. Taikant šias teoremas praktiniams uždaviniams spręsti, tikslūs analitiniai sprendiniai gaunami tik paprastoms konstrukcijoms (sijoms, rėmams). Štai kodėl įvado dalyje „Tiriamoji problema“ buvo pabrėžta, kad tiesioginis klasikinių teoremų taikymas kontinualioms konstrukcijoms (plokštėms, kevalams) yra praktiškai neįmanomas, nors eilė mokslininkų Prageris (Wiliam Prager, 1883–1980 m.), Saimondsas (Paul Southworth Symonds, 1916–2005 m.) bandė praplėsti šių teoremų taikymo ribas. Itin svarbūs čia Pragerio darbai konstrukcijų optimizavimo srityje (Symonds *et al.* 1951a;b, Prager *et al.* 1967).

Vis dėlto dvidešimtojo amžiaus antroje pusėje prisitaikomumo teorijai iškilo klausimai: 1) kaip Melano ir Koiterio teoremas panaudoti praktinei statybos inžinerijai; 2) naujų metodų panaudojimo patikimumas. Pirmieji į šiuos klausimus savo darbais pabandė atsakyti Majeris (Maier *et al.* 1972; 2000; 2003). Žymų indėlį savo darbais (Sawczuk 1974; König *et al.* 1974; 1981) čia įnešė lenkų mokslininkai Savčiukas (Antony Sawczuk, 1927–1984), Königas (Jan Andrzej König, 1937–1990). Savo monografijoje (Gokhfeld *et al.* 1980) apvalių plokščių prisitaikomumą nagrinėjo rusų mokslininkai Gochfeldas (David Aronovich Gokhfeld, 1919–2004) ir Černiavskis (Oleg Fiodorovič Cherniavsky, 1945). Šioje darbų serijoje aktualus disertacijos tematikai yra prof. A. Savčiuko 1969 metų darbas (Sawczuk 1969). Tai vienas pirmųjų darbų, skirtų kevalo ciklinio plastinio suirimo apkrovos nustatymui (T. Ulitino disertacijoje „Sferinio kevalo optimizavimas prisitaikomumo sąlygomis“ toks uždavinys yra tik atskiras apkrovos optimizavimo uždavinio atvejis).

Pastaraisiais metais prisitaikomumo teorijos metodai nukreipti analizuoti šilumines ir dinamines apkrovas (Venskus *et al.* 2012), atsižvelgti į geometrinio netiesiškumo reiškinius, plėtoti baigtinių elementų, matematinio programavimo taikymo metodikas (Mróz *et al.* 1995; Hung *et al.* 2000; Weichert *et al.* 2002; Kaliszky *et al.* 2002; Staat *et al.* 2003; Atkočiūnas 2011). Aktualūs moderniosios prisitaikomumo teorijos klausimai siejami su kinematinio sustiprėjimu (Staat *et al.* 2002; Abdel-Karim 2005). Čyras (Aleksandras Čyras, 1927–2001) savo monografijoje (Čyras 1983) parodė, kad vienkartės apkrovos konstrukcijos ribinės pusiausvyros uždavinys yra atskiras šios konstrukcijos ciklinio-plastinio suirimo uždavinio atvejis.

Iš analitinės prisitaikomumo teorijos vystymosi apžvalgos išryškėja aktualūs jos taikymo statybos inžinerijoje klausimai: energiniai mechanikos principai, jų realizavimo grindimas matematinio programavimo metodais, pusiausviri baigtiniai elementai (PBE). Pastarieji lemia statiškai galimų įrašų paiešką prisitaikiusių konstrukcijų analizei. Tačiau stokojama kevalų, jų tarpe sferinių, optimizavimo prisitaikomumo sąlygomis sprendinių.

## 1.2. Prisitaikančių konstrukcijų mechanikos energiniai principai

Tampriai-plastinių konstrukcijų optimizavimo proceso pagrindinė problema yra įtempių ir deformacijų, kurie priklauso nuo apkrovimo istorijos, skaičiavimas. Taigi, optimali konstrukcija priklauso ne tik nuo maksimalių apkrovų, bet ir tų apkrovų kitimo istorijos. Apkrovos pasiskirstymas gali būti labai įvairus tiek pasiskirstymo vietos, tiek kitimo laike  $t$  prasme. Visos galimos apkrovų kombinacijos sudaro apkrovos veikimo sritį – hodografa (Stein *et al.* 1993). Nagrinėjant tamprias konstrukcijas, užtenka atsižvelgti tik į šios srities išorines viršūnes. Kai konstrukcija yra tampriai-plastinė, būtina nagrinėti prisitaikomumo būvį. Veikiant KKA prisitaikomumo būvis susiformuoja, jeigu po pradinių apkrovimų ciklų konstrukcijoje atsiranda užgesstančios laike  $t$  plastinės deformacijos. Sakoma, kad konstrukcijoje prisitaiko prie duotosios apkrovos. Susidaro pastovus liekamųjų įtempių laukas ir todėl disipacijos energijos greitis tampa lygūs nuliui. Tampriai-plastinės medžiagos įtempių ir deformacijų ryšio kreivė yra pavaizduota 1.1 pav. (Wiechmann *et al.* 1997; 2006). Tampriai-plastinės konstrukcijos prisitaikomumo sąlyga yra tokia, jog egzistuoja bent vienas liekamasis įtempis  $\rho_{ij}(\mathbf{X})$  ir grįžtamasis įtempis  $\bar{\gamma}_{ij}(\mathbf{X})$ , kai sąlyga

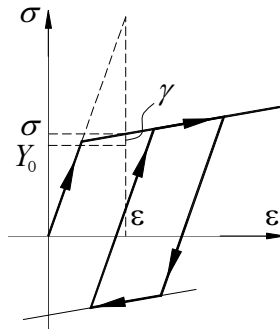
$$\Phi \left\| \text{dev} \left[ \sigma_{ij}^{(e)}(\mathbf{X}, t) + \rho_{ij}(\mathbf{X}) - \frac{2}{3} \bar{\gamma}_{ij}(\mathbf{X}) \right] \right\| - \sqrt{\frac{2}{3}} Y_0 \leq 0, \quad (1.4)$$



yra tenkinama prie visų galimų apkrovų  $\mathbf{P}(t)$  aibės  $\mathcal{U}$ ,

$$\Phi \left[ m\sigma_{ij}^{(e)}(\mathbf{X}, t), m\rho_{ij}(\mathbf{X}), m\bar{\gamma}(\mathbf{X}) \right] \leq 0. \quad (1.5)$$

Čia  $\sigma_{ij}^{(e)}$  – tamprios konstrukcijos kintamieji įtempiai.



**1.1 pav.** Tampriai-plastinės medžiagos įtempių ir deformacijų santykio kreivė

**Fig. 1.1.** Elastic-plastic materials stress and strain curve

Čia  $Y_0$  – ribinis įtempis;  $\gamma$  – grįžtamasis įtempis;  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – tikrasis įtempis ir deformacija. Rodyklės rodo apkrovimo programos eigą.

Prisitaikančių konstrukcijų įtempių ir deformacijų šiuolaikinėje analizėje pasitelkiami du pagrindiniai energiniai principai. Analizės uždavinio statinė formuluotė grindžiama papildomos deformavimo energijos minimumo principu (Atkočiūnas 2011):

*iš visų statiškai leistinų liekamųjų įrąžų vektorių  $\mathbf{S}_r$  tikrasis yra tas, kuriam esant konstrukcijos prisitaikomumo būvio papildoma deformavimosi energija  $\mathcal{F}$  yra minimali.*

Kinematinė analizės uždavinio formuluotė sudaroma kinematiškai leistiniems liekamųjų įrąžų poslinkių vektoriui  $\mathbf{u}_r$ :

*iš visų kinematiškai leistinų liekamųjų poslinkių vektorių  $\mathbf{u}_r$  tikrasis yra tas, kuriame esant konstrukcijos prisitaikomumo būvio pilnutinė potencinė energija  $\mathcal{F}$  yra minimali.*

Būtent šie du energiniai principai padeda suformuluoti prisitaikančių konstrukcijų, jų tarpe ir sferinių kevalų, optimizavimo uždavinių matematinius modelius.

Istoriškai ekstreminių energinių principų prisitaikomumo teorijoje plėtotę lėmė ribinės pusiausvyros uždavinys, būtent jis pradžioje ir buvo suformuluotas tik lenkiamai sistemai. Tiesiniai uždaviniai dažniausiai buvo sudaromi pasitelkus Melano teoremą: *jeigu statiškai leistinoms liekamosioms įrąžoms egzistuoja*

prisitaikomumo būvio atsargos koeficientas  $s > 1$ , sistema prisitaiko prie duotosios kartotinės-kintamosios apkrovos. Rėmui, kurio ribinis momentas  $M_0$ , šis principas įgalina sudaryti tokį matematinį modelį:

$$\text{rasti} \quad s \rightarrow \max \quad (1.6)$$

$$\text{esant sąlygomis} \quad \mathbf{A}\mathbf{M}_r = \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{e,\max} \leq \frac{1}{s} \mathbf{M}_0, \quad (1.8)$$

$$-\mathbf{M}_r - \mathbf{M}_{e,\min} \leq \frac{1}{s} \mathbf{M}_0. \quad (1.9)$$

Norint išvengti kintamojo plastiškumo (Atkočiūnas 2011), papildomai reiktų riboti tampriųjų momentų  $\mathbf{M}_{e,\max}$ ,  $\mathbf{M}_{e,\min}$  kitimo intervalą:

$$\mathbf{M}_{e,\max} + \mathbf{M}_{e,\min} < 2 \mathbf{M}_T, \quad (1.10)$$

Čia  $M_T$  – tampraus būvio maksimalus momentas. Viechmano ir jo kolegų darbe (Wiechmann *et al.* 2006) uždavinys apibendrintas taip:

$$\text{rasti:} \quad \beta \rightarrow \max \quad (1.11)$$

$$\text{esant sąlygomis} \quad \mathcal{G}_p = \mathbf{0}, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{G}_{\sigma_E} = \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

$$\Phi \leq \mathbf{0}. \quad (1.14)$$

Čia  $\beta$  – optimizavimo uždavinio, kartotinės-kintamosios apkrovos parametras. Sąlygos (1.11)–(1.14) apibrėžia pusiausvyros lygtis liekamiesiems įtempiams  $\rho_{ij}$  ir tampriems įtempiams  $\sigma_{ij}^{(e)}$ :

$$\mathcal{G}_p = \int_{\Omega_0} \text{Grad } \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\rho}_{ij}(\mathbf{X}) dV_{\Omega_0} \quad (1.15)$$

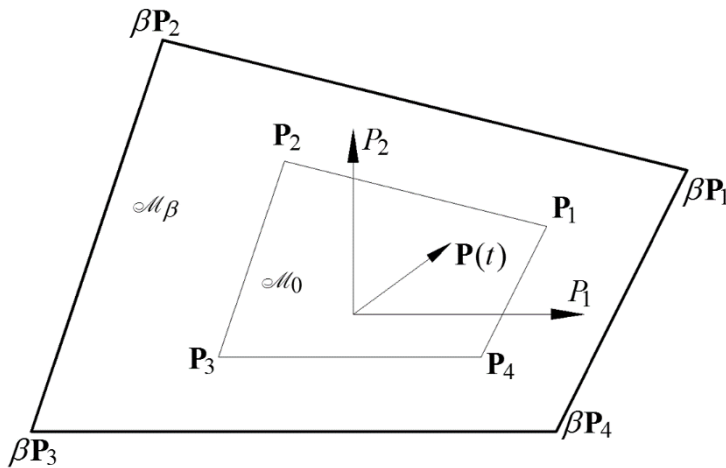
$$\mathcal{G}_{\sigma_E} = \int_{\Omega_0} \text{Grad } \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(e)}(\mathbf{X}, t) dV_{\Omega_0} - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) dV_{\Omega_0} - \int_{\partial\Omega_0} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{q}(\mathbf{X}, t) dA_{\partial\Omega_0} \quad (1.16)$$

Čia  $\boldsymbol{\eta}$  žymi taikomas statikos lygties funkcijas, o  $\mathbf{q}$  ir  $\mathbf{b}$  kartotinės-kintamos apkrovos.

Optimizavimo uždavinio apribojimai (1.12)–(1.13) priklauso nuo tamprios konstrukcijos skaičiavimo įtempių, liekamųjų įtempių ir grįžtamųjų įtempių (1.5),

(1.15) ir (1.16). Verta paminėti, kad pusiausvyros ir prisitaikomumo apribojimų sąlygos turi būti įvykdytos bet kuriuo metu. Klasikiniuose prisitaikomumo uždaviniuose, tamprios konstrukcijos skaičiavimo įtempiai (įrašos) priklauso nuo tam tikros apkrovimo sekos. Apkrovimo sritis  $\mathcal{M}$  yra ribojama iškilo daugiasienio kampuose (1.2 pav.). Bet kuris apkrovos taškas esantis apkrovimo srityje  $\mathcal{M}$  gali būti apibūdinamas per daugiasienio viršūnes (Stein *et al.* 2001, Wiechmann *et al.* 2006, Atkočiūnas 2011):

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} \alpha_j(t) \mathbf{P}_j, \text{ čia } \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} \alpha_j(t) = 1, \text{ visiems } j \in \mathcal{M}. \quad (1.17)$$



1.2 pav. Apkrovimo ribos  $\mathcal{M}$ , kai  $p = 4$ .

Fig. 1.2. The load domain  $\mathcal{M}$  when  $p = 4$ .

Taigi, tamprios konstrukcijos skaičiavimo įtempiai (įrašos) apskaičiuojami pagal formulę:

$$\sigma_E(t) = \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} \alpha_j(t) \sigma_{ij}^{(e)}, \text{ visiems } j \in \mathcal{M}. \quad (1.18)$$

Čia  $\mathbf{P}(t)$  – galima apkrovos kitimo sritis;  $\mathbf{P}_j$  – apkrovų daugiasienio išorinės viršūnės, jų aibė  $\mathcal{M}$ . Tamprųjų įtempių (įrašų) vektorių skaičius tiesiogiai priklauso nuo daugiasienio viršūnių skaičiaus.

Optimizavimo uždavinį (1.11)–(1.14) galima formuluoti remiantis šia statine prisitaikomumo teorema: *duotajai konstrukcijai ir apkrovos kriterijui, reikia nustatyti apkrovos viršutines ir apatines apkrovimo ribas, kol konstrukcija bus*

*prisitaikomumo būvyje*. Skaliamasis dydis  $\beta$  yra optimizavimo uždavinio tikslo funkcija.

## 1.3. Prisitaikančių konstrukcijų analizė baigtinių elementų metodu

### 1.3.1. Bendros žinios

Konstrukcijų mechanikos uždavinių sprendimas grindžiamas jų diskretiniais modeliais. Diskretinio modelio sudarymui pasitelkiamas baigtinių elementų metodas (BEM). BEM yra vienas iš skaitinių būdų gauti artimą tiksliai diferencialinių lygčių sprendimą. Tikslumas priklauso nuo baigtinių elementų tipo, jų skaičiaus. BEM svarbus statybos inžinerijos praktikai, kurioje kaip taisyklė susiduriama su sudėtingų geometrinių formų konstrukcijomis.

BEM pradėtas taikyti dar XXa. pradžioje, naudojant interpoliavimo funkcijas (Ritz 1909). Palyginus su šiuolaikiniais metodais, tuometinės interpoliacinės funkcijos turėjo būti siejamos su visa konstrukcija. Dabartiniu metu interpoliacinės funkcijos taikomos baigtiniam elementui, jas automatiškai generuoja kompiuteris.

Dažniausiai taikoma baigtinių elementų forma atitinka žinomą iš statybinės mechanikos poslinkių metodą (Zienkiewicz *et al.* 1982; 2013; Shames *et al.* 1997; Bhatti 2005; Chappelle *et al.* 2011). Šis metodas parankus prisitaikomumo analizės uždavinių kinematinėms formuluotėms. Prisitaikomumo analizės uždavinio statinei formuluotei geriau tinka pusiausviri baigtiniai elementai (Gallagher 1969; 1975; Fraeijns de Veubeke 2001; Belytschko *et al.* 2013).

BEM taikymą, sprendžiant įvairias problemas, galima aprašyti šiais žingsniais:

1. Konstrukcijos diskretizavimas baigtiniais elementais.
2. Elemento lygčių aprašymas.
3. Visų elementų lygčių apibendrinimas.
4. Kraštinių sąlygų aprašymas.
5. Matematinio modelio sudarymas.
6. Uždavinio sprendimas, rezultatų nagrinėjimas ir įvertinimas.

Pagrindinė baigtinių elementų metodo idėja yra sudėtingą konstrukciją suskaidyti į baigtinius elementus su skaičiuojamaisiais mazgais.

Taigi, konstrukcija yra aprašoma viena ar keliomis diferencialinėmis lygtimis, kurios sudaro atitinkamą elementų lygčių rinkinį. Lygčių sudarymo forma ir savybės turi būti žinomos. Baigtinio elemento parinkimo stadija yra labai svarbi. Tai lemia lygčių sudarymo ir rezultatų tikslumą, bei konvergenciją. Išsamios žinios apie baigtinių elementų formavimą ir surinkimą į bendrąją lygčių

sistemą, leidžia tinkamai parinkti baigtinius elementus. Baigtinių elementų lygtys išvedamos pasitelkus elementų diferencialines lygčių išraiškas:

1D elemento diferencialinė išraiška

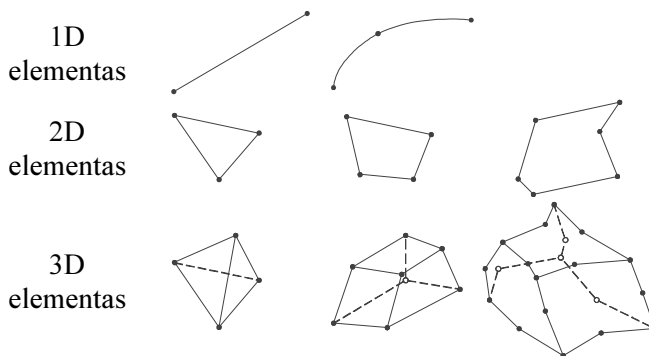
$$\frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + p(x)u(x) + q(x) = 0. \quad (1.14)$$

2D elemento diferencialinė išraiška:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(y) \frac{\partial u(x)}{\partial y} \right) + pu + q = 0. \quad (1.15)$$

Elementų poslinkių funkcijos išreiškiamos to elemento pagrindinių mazginių taškų poslinkiais, o įrąžų funkcijos – visų mazgų įrąžoms.

1D elementai būna lenkti arba tiesūs savo ašių atžvilgiu (1.3 pav.). 2D elementai paprastai yra trikampio ar keturkampio formos. Kaip ir 1D, 2D elementų kraštinės gali būti tiesios arba išlenktos. Dažniausiai sudėtingesnių konstrukcijų skaičiavimui yra pasirenkami trikampiai elementai, kurių diskretizacija yra tikslesnė, jais gaunami tikslesni rezultatai. 3D uždaviniams spręsti pasirenkami tūriniai elementai: pilnaviduriai tetraedro ar kubinės formos elementai. Tipinės formos elementai pavaizduoti 1.3 pav. Juodais taškais vaizduojami pagrindiniai baigtinio elemento mazgai.



**1.3 pav.** Tipinės baigtinių elementų formos  
**Fig. 1.3.** Shape of the typical finite element

Elemento diferencialinės pusiausvyros lygtys nusako ryšį tarp jo vidinių ir išorinių jėgų. Kadangi šių lygčių skaičius gali būti labai didelis (konstrukcija diskretizuojama į daugybę baigtinių elementų), tai visas šias lygtis patogų surašyti į matricas. Šių lygčių skaičiavimas susideda iš dviejų etapų (Bhatti 2005; Chapelle *et al.* 2011; Belytschko *et al.* 2013; Zienkiewicz *et al.* 2013). Pirmajame etape

(elementų išvedimo etapas) elemento matricos yra išvedamos tipiniam elementui, kuris vėliau atsispindi visuose elementuose. Skaičiavimai atliekami simboline forma, nenaudojant skaitinių verčių konkretaus elemento. Šio etapo tikslas yra sukurti bendrąsias formules baigtinio elemento matricoms, kurios vėliau bus naudojamos sprendžiant skaitinius uždavinius. Antrajame etape bendrosios formulės naudojamos užrašant konkretiems uždaviniams spręsti, įrašant į matricas kiekvieno elemento skaitines reikšmes (fizikinius, geometrinius ir kt. parametrus).

BEM yra pagrindinis įrankis nustatyti konstrukcijų įtempių ir deformacijų būvį statybinėse konstrukcijose, ypač kevalinėse, kadangi neįmanoma gauti tikslų analitinių kevalo sprendinių dėl sudėtingų kraštinių sąlygų. Tuo tarpu baigtiniuose elementuose kraštinės sąlygos įvertinamos pakankamai tiksliai. Tuomet įtempių ir deformacijų būvio nustatymo uždavinio sprendimas nesunkiai algoritmizuojamas, ypač pasitelkus matricas. Pats metodas lengvai įsisavinamas tiek bendrosios paskirties programinėse įrangose, tiek tų programinių įrangų kūrėjų. Tai dar viena iš pagrindinių priežasčių, kodėl baigtinių elementų metodas yra populiarus. Sukurti baigtinių elementų metodu pagrįstų optimizavimo uždavinių sprendimo paketai, tokie kaip *Maple* (Portela *et al.* 2002), *MATLAB* (Kwon *et al.* 1997; Ferreira 2008) ir kitus. Baigtinių elementų modelio skaičiavimo rezultatų analizė yra itin svarbi, nes rezultatai galiausiai tampa projektavimo pagrindu. Tačiau prisitaikančių sferinių kevalų optimizavimo uždavinių šiuose paketuose. Nėra ir diskretizavimo pusiausviris baigtiniais elementais. Tai suponuoja disertacinio darbo kryptį, tikslus, uždavinius, nagrinėjamus sekančiuose disertacijos skyriuose.

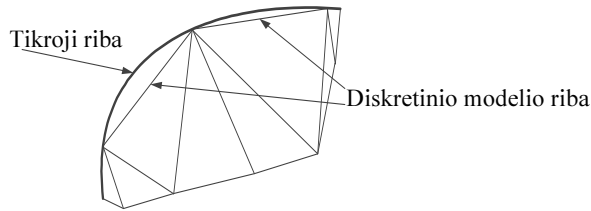
Tenka dar pažymėti, kad BEM yra reiklus kompiuteriams resursams. Dar 1960 metais baigtinių elementų programinis paketas *Nastran* kartu su kosminių tyrimų centru buvo sukurtas JAV. Šis paketas buvo pirmasis, kuris pajėgė atlikti didelius matricinius veiksmus. Nuo to laiko buvo sukurta daugybė komercinių programinių paketų (*Ansys*, *Algor*, *Cosmos/M* ir *Abaqus*). Jų galimybės gana plačios: konstrukcijų statinio ir dinaminio poveikio analizėje, šiluminio perdavimo, skysčių ir dujų tekėjimo, elektromagnetinio ir seisminiuose uždaviniuose.

### 1.3.2. Bendros pastabos apie baigtinių elementų tikslumą

Baigtinių elementų skaičiavimo tikslumas priklauso nuo baigtinių elementų skaičiaus ir elementų išdėstymo. Apskirtai, skaičiavimo tikslumas padidėja, kai yra didinamas baigtinių elementų skaičius (Hinton *et al.* 1992; Libai *et al.* 1998; Kala *et al.* 2013). Didėjant baigtinių elementų skaičiui sparčiai didėja ir uždavinio apimtis, o tai sukelia papildomų sunkumų skaičiuojant tampriai-plastines sistemas.

Baigtinių elementų tinklas turi kuo tiksliau atitiktį visą konstrukciją. Pavyzdžiai, jeigu konstrukcijos forma yra lenkta, tai tose vietose reikėtų naudoti sutankintą baigtinių elementų tinklą (1.4 pav.).

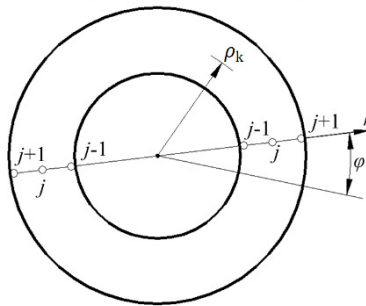
Baigtiniai elementai plačiai taikomi statybos inžinerijoje, sudarant konstrukcijų mechanikos uždavinių matematinius modelius, skaičiuojant plienines konstrukcijas ir nagrinėjant net gelžbetoninių elementų darbą (Gribniak *et al.* 2010).



**1.4 pav.** Faktinis neatitikimas su tikrąja konstrukcijos riba

**Fig. 1.4.** The actual mismatch with the real construction boundary

Aišku, jeigu įmanoma, geriau naudoti tokius elementus, kurie tiksliai prisitaiko prie konstrukcijos kontūro. Pavyzdžiui, skaičiuojant sferinius kevalus ar apvalias plokštes naudotini pusiausviri žiediniai baigtiniai elementai (Kačianauskas *et al.* 1988; Kalanta 1995). Tokiu atveju tikroji konstrukcijos riba visiškai sutampa su konstrukcijos diskretinio modelio riba (1.5 pav.) (Skeivalas *et al.* 2010). Bendruoju atveju naudojant daugiau elementų, gaunamas tikslesnis

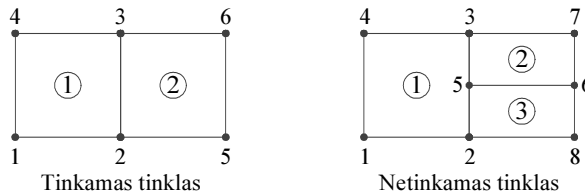


**1.5 pav.** Žiedinis baigtinis elementas

**Fig. 1.5.** The circular finite element

rezultatas. Kai kurių baigtinių elementų tipų gaunami rezultatai tikslesni, todėl verta atsižvelgti į elementų tipo ir tinkamo skaičiuojamo tinklo parinkimo dėl pageidaujamo tikslumo (Gribniak *et al.* 2010). Baigtiniai elementai sujungiami tik

pagrindiniais skaičiuojamaisiais mazgais (1.6 pav.). Svarbu, jog sukurtasis



1.6 pav. Tinkamas ir netinkamas keturių mazgų elementų tinklo parinkimas

Fig. 1.6. Valid and invalid mesh selection for four-node elements

baigtinių elementų tinklas jungtusi baigtinių elementų pagrindiniais mazgais. Jeigu konstrukcija yra simetrinė, tai nebūtina nagrinėti visos konstrukcijos. Užtenka išnagrinėti tik vieną kontūrą, vieną jos dalį, kad gautume rezultatus. Taip yra sumažinamas uždavinys, gaunamas tikslesnis rezultatas.

### 1.3.3. Pusiausvirųjų baigtinių elementų metodas

Disertaciniame darbe sferinio kevalo diskretizacijai bus pasitelktas pusiausvirųjų baigtinių elementų metodas (Belytschko 1972; Gallagher 1975; Kačianauskas *et al.* 1988; Kalanta 1996; 2007; Belytschko *et al.* 2013). Diskretinio modelio įtempių būvis aprašomas įrašų vektoriumi  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1 \ \mathbf{S}_2 \ \dots \ \mathbf{S}_\zeta]^T$ ,  $\zeta = s \times v$ , kur  $s$  yra baigtinių elementų skaičius ( $k = 1, 2, \dots, s, k \in K$ ), o  $v$  yra kiekvieno elemento skaičiuojamųjų pjūvių skaičius ( $l = 1, 2, \dots, v, l \in L$ ). Mazginės deformacijos apjungiamos į  $n$ -matį vektorių  $\mathbf{\Theta} = [\mathbf{\Theta}_1 \ \mathbf{\Theta}_2 \ \dots \ \mathbf{\Theta}_\zeta]^T$ . Jeigu konstrukcijos diskretinio modelio laisvumo laipsnis  $m$  ( $m$  – pusiausvyros lygčių skaičius,  $i = 1, 2, \dots, m$ ), o įrašų vektoriaus  $\mathbf{S}$  komponentų iš viso yra  $n$ , pusiausvyros lygčių  $\mathbf{AS} = \mathbf{F}$  koeficientų matrica  $\mathbf{A}$  yra  $(m \times n)$  eilės. Čia  $\mathbf{F} = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_m]^T$  – apkrovos vektorius. Geometrinėse lygtyse  $\mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{\Theta}$  įeina dualus apkrovų vektoriumi  $\mathbf{F}$  kintamasis, būtent diskretinio modelio globalinių poslinkių vektorius  $\mathbf{u}$ . Nagrinėjimas atliekamas, darant prielaidą apie mažus poslinkius.

Tegul konstrukcijos geometrija, elementų skerspjuvių forma ir medžiagos takumo riba  $f_y$  yra žinomi. Įrašos  $\mathbf{S}_k(x)$  bet kuriame baigtinio elemento taške  $\mathbf{x}$  išreiškiamos elemento mazginių taškų įrašomis  $\mathbf{S}_k$ ,  $k \in K$ . Pusiausviro baigtinio elemento įrašų  $\mathbf{S}_k(x)$  aproksimuojančios funkcijos yra tokios:



$$\mathbf{S}_k(x) = \mathbf{H}_k(x) \mathbf{S}_k. \quad (1.16)$$

Čia  $\mathbf{H}_k(x)$  –  $k$ -ojo elemento įrašų aproksimacijos matrica,  $\mathbf{S}_k$  – įrašų elemento mazguose vektorius. Funkcijos, įeinančios į (1.16) priklausomybės, dažniausiai tokios, kad elemento diferencialinės pusiausvyros lygtys

$$\mathcal{A} \mathbf{S}(x) = \mathbf{q}(x) \quad (1.17)$$

nėra tapatingai tenkinamos (vėliau laikysime, kad  $\mathbf{q}_k(x) = \text{const}$ ). Todėl diskretinio modelio pusiausvyra yra užtikrinama, rašant pusiausvyros lygtis konstrukcijos elementams ir juos į sistemą jungiantiems pagrindiniams mazgams. Įrašius priklausomybę (1.16) į lygtis (1.17) ir atlikus diferencijavimo veiksmus, gaunamos tokios baigtinio elemento pusiausvyros algebrinės lygtys:

$$\mathbf{A}_k(x) \mathbf{S}_k = \mathbf{q}_k, \quad k \in K. \quad (1.18)$$

Čia  $\mathbf{A}_k(x) = \mathcal{A} \mathbf{H}_k(x)$ , o apkrova paskirstyta tolygiai, todėl  $\mathbf{q}_k(x) = \mathbf{q}_k$ . Atskiri elementai į sistemą jungiami dar rašant pusiausvyros lygtis pagrindiniams baigtinių elementų mazgams. Atsižvelgus į kraštines sąlygas, konstrukcijos  $m$  pusiausvyros lygčių sistema galutinai užrašoma taip:

$$\mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{F} \text{ arba } \sum_k \mathbf{A}_k \mathbf{S}_k = \mathbf{F}. \quad (1.19)$$

Konstrukcijos diskretinio modelio geometrinės lygtys gaunamos, taikant įrašų galimų pokyčių principą. Paskiram  $k$  baigtiniam elementui geometrinės lygtys yra tokios:

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{u} - \mathbf{D}_k \mathbf{S}_k = \mathbf{0}, \quad k \in K. \quad (1.20)$$

Čia  $k$ -ojo elemento pasiduodamumo matrica  $\mathbf{D}_k$ ; lokalinėje elemento koordinatinių sistemoje skaičiuojama pagal formulę:

$$\mathbf{D}_k = \int_{A_k} \mathbf{H}_k^T(x) \mathbf{d}_k \mathbf{H}_k(x) dA. \quad (1.21)$$

Integruojama  $k$ -ojo elemento paviršiumi  $A_k$ . Atsižvelgus į kraštines sąlygas, visam konstrukcijos diskretiniam modeliui geometrinės lygtys yra:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{D} \mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (1.22)$$

$\mathbf{A}^T$  yra matricos  $\mathbf{A}$  transponuotoji matrica,  $\mathbf{D}$  – kvazidiagonalinė elementų pasiduodamumų  $\mathbf{D}_k$  matrica. Poslinkių vektoriaus  $\mathbf{u}$  komponentų fizinę prasmę lemia pusiausvyros lygčių (1.19) sudarymo tvarka ir dualūs ryšiai tarp

pusiausvyros  $\mathbf{AS}=\mathbf{F}$  ir geometrinių  $\mathbf{A}^T \mathbf{u} - \mathbf{DS}=\mathbf{0}$  lygčių. Šie ryšiai teigia: kiekvieną pusiausvyros lygtį (apkrovos vektorių  $\mathbf{F}$ ) atitinka poslinkių vektoriaus  $\mathbf{u}$  komponentas, o kiekvieną įrąžų vektoriaus  $\mathbf{S}$  komponentą atitinka deformacija iš vektoriaus  $\mathbf{\Theta}$ .

## 1.4. Plonasieniai sferiniai kevalai

Kevalu vadiname kūną, apribotą dviem artimais kreivaisiais paviršiais, tarp kurių atstumas yra gerokai mažesnis už kitus du kūno matmenis (Atkočiūnas *et al.* 2004). Gniuždomų, kartu ir lenkiamų, kevalų savybės labai priklauso nuo jų storio lyginant su kitomis jų dimensijomis. Yra trijų tipų kevalai: plonasieniai kevalai esant mažiems poslinkiams, plonasieniai kevalai esant dideliems poslinkiams, stori kevalai (kevalo storis artimas jo kreivio spinduliui). Toliau plačiau aptariami plonasieniai kevalai, kurie ir bus nagrinėjami vėlesniuose skyriuose. Plonasienių kevalų poslinkiai  $u$  yra maži lyginant su jo storiu  $h$ . Gniuždomų ir lenkiamų kevalų, veikiamų statmenai jiems išorinių apkrovų, teorija gali būti plėtojama darant šias prielaidas (Timoshenko *et al.* 1959; Calladine 1989; Save *et al.* 1997):

1. Kevalo vidurinės plokštumos deformavimosi taškai proceso metu pasislenka tik apkrovos veikimo kryptimi.
2. Kevalo vidurinės plokštumos normalė po deformacijos lieka tiesė, statmena kevalo viduriniam paviršiui.
3. Lėkšto kevalo paviršiaus geometrija apytiksliai sutampa su jo projekcijos plokštumoje  $x_1Ox_2$  geometrija. Ši prielaida teigia, jog ortogonaliosios kreivlinijinės koordinatės sistemos  $O\alpha_1\alpha_2$  koordinatės nesiskiria nuo paviršiaus projekcijos plokštumoje  $x_1$  ir  $x_2$ .
4. Normaliniai įtempiai, kurie yra statmeni kevalo viduriniam paviršiui yra gana maži, todėl į juos galima neatsižvelgti.

Atsižvelgus į šias prielaidas, visi įtempių komponentai gali būti išreikšti kevalo poslinkiais, kurie yra dviejų koordinatžių funkcijos kevalo plokštumoje. Šio funkcijos turi tenkinti diferencialines pusiausvyros lygtis kartu ir kraštines sąlygas, kurios yra visiškai apibrėžtos poslinkiais (Zienkiewicz *et al.* 2013). Taigi, šių lygčių sprendinys pilnai suteikia visą reikiamą informaciją, kad suskaičiuoti įtempius bet kuriame kevalo taške. Antroji prielaida yra lygiavertė kevalo šlyties jėgų deformacijų poveikio nepaisymui. Ši prielaida paprastai yra tenkinama, tačiau kai kuriais atvejais šlyties poveikis tampa svarbiu (tais atvejais tenka papildyti plonasienių kevalų teoriją). Kevalas gali perduoti paviršiaus apkrovą per ašines jėgas sukeliančius ir paskirstytus per visą kevalo storį įtempius, lygiagrečius tangentinei (vidurinei) plokštumai. Iš esmės ašinės jėgos yra nepriklausomos nuo lenkimo ir yra visiškai apibrėžtos statinės pusiausvyros

lygtimis. Kevalo lenkimo momentai paprastai būna labai lokalizuoti ir gali būti apskaičiuoti, remiantis tokiomis pačiomis prielaidomis kaip ir skaičiuojant plokštes. Tačiau čia susiduriama su kevalo stabilumo problema: mažų poslinkių prielaida tampa niekine ir turėtų būti pakeista tikslesne.

Disertaciniame darbe nagrinėjamas sferinis kevalas, diskretizuotas PBE (Fraeijs de Veubeke 2001; Belytschko *et al.* 2013). Literatūros analitinės analizės apžvalgos metu tikslinga iškart pabrėžti, kad kituose skyriuose bus įrodyta, kad PBE metodas yra kur kas pranašesnis už geometriškai darnių baigtinių elementų metodą. Todėl skaičiuojant konstrukcijas užtenka parinkti mažesnę baigtinių elementų kiekį, kad gauti norimo tikslumo rezultatą.

## 1.5. Sferinių kevalų optimizacija ir kompiuterinės technologijos

Optimizavimo uždavinių sprendimas yra tiesiogiai susietas su matematiniu programavimu. Sparčiai tobulėjančios kompiuterinės technologijos leidžia greičiau ir tiksliau spręsti sudėtingus netiesinio matematinio programavimo uždavinius, o tai yra ypač aktualu skaičiuojant tampriai-plastines konstrukcijas. *Fortran* – tai viena pirmųjų matematinio programavimo kalbų, kuri buvo specialiai sukurta realizuoti moksliniams mechanikos uždaviniams spręsti. Kiekviena matematinio programavimo kalba turi savitą braižą, kurį kuria pats programuotojas. Sukurtasis skaičiavimo algoritmas dažniausiai buvo skirtas tik tam tikram uždavinių tipui, nes skirtingiems uždaviniams kuriami skirtingi algoritmai. *Fortran* programavimo kalba dar ir šiandien yra viena pagrindinių kalbų realizuojant mechanikos uždavinius (Smith *et al.* 2004; Adams *et al.* 2009). VGTU statybinės mechanikos mokslininkai tai pat kūrė sprendimo algoritmus, juos įgyvendino *Fortran* kalba (Karkauskas *et al.* 1995).

VGTU statybinės mechanikos katedroje pradėta naudoti programinį paketą *MATLAB*, sukurtą dar 1970 m. *MATLAB* (iš žodžių *MATrix LABoratory*) yra daugiaplatformė MathWorks programinė įranga, skirta įvairių mokslo šakų problemoms spręsti, ypač matematinėms. Programinis paketas turi puikias galimybes manipuliacijoms su matricomis – būtent toks buvo pirminis šios programos tikslas. Dabar tai didžiulis galingas paketas, turintis savitą, lengvai perprantamą programavimo kalbą. Programinis paketas *MATLAB* taip pat leidžia savarankiškai sukurtą skaičiavimo algoritmą įtraukti į savo skaičiavimo branduolį. Tai suteikia galimybes mokslininkams patobulinti skaičiavimo algoritmus ir taip paspartinti tiek savo, tiek kitų kolegų skaičiavimus (Ferreira 2009; Magrab *et al.* 2010).

Disertaciniame darbe sprendžiant netiesio matematinio programavimo uždavinius buvo pasitelkta programinio paketo *MATLAB* paprogramis *fmincon*. Ji

yra skirta optimizavimo uždaviniais spręsti, kai tikslo funkcija ir apribojimai (lygybės ir nelygybės) yra netiesiniai. Paprogramis *fmincon* sprendžia matematinio programavimo uždavinius pagal tokio tipo matematinį modelį

$$\text{rasti} \quad f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (1.22)$$

$$\text{esant sąlygomis} \quad \mathbf{A}_{nq} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{nq}, \quad \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{C}_{nq}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}_{eq}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub}. \quad (1.25)$$

Čia  $\mathbf{x}$  – optimizavimo uždavinio nežinomųjų vektorius;  $\min f(\mathbf{x})$  – optimizavimo uždavinio tikslo funkcija;  $\mathbf{A}_{nq}$  – optimizavimo uždavinio apribojimu sąlygų-nelygybių, išreikštų tiesinėmis priklausomybėmis, matrica;  $\mathbf{b}_{nq}$  – optimizavimo uždavinio apribojimu sąlygų-nelygybių, išreikštų tiesinėmis priklausomybėmis, laisvųjų narių vektorius;  $\mathbf{A}_{eq}$  – optimizavimo uždavinio apribojimu sąlygų-lygybių, išreikštų tiesinėmis priklausomybėmis, matrica;  $\mathbf{b}_{eq}$  – optimizavimo uždavinio apribojimu sąlygų-lygybių, išreikštų tiesinėmis priklausomybėmis, laisvųjų narių vektorius;  $\mathbf{C}_{nq}(\mathbf{x})$  – optimizavimo uždavinio apribojimu sąlygų-nelygybių, išreikštų netiesinėmis (funkcinėmis) priklausomybėmis matrica;  $\mathbf{C}_{eq}(\mathbf{x})$  – optimizavimo uždavinio apribojimu sąlygų-lygybių, išreikštų netiesinėmis (funkcinėmis) priklausomybėmis matrica;  $\mathbf{lb}, \mathbf{ub}$  – optimizavimo uždavinio nežinomųjų vektoriaus apatinių ir viršutinių ribų vektoriai.

Verta paminėti, kad paprogramis *fmincon* pats savyje turi keletą skaičiavimo algoritmų (*sqp*, *interior-point*, *active-set*, *trust-region-reflective*), kuriuos leidžiama laisvai pasirinkti paprogramis naudotojui priklausomai nuo to, koks yra sprendžiamas matematinio programavimo uždavinys.

## 1.6. Pirmojo skyriaus išvados ir disertacijos uždavinių formulavimas

Atlikus prisitaikančių konstrukcijų optimizavimo metodų apžvalgą galima padaryti tokias išvadas:

1. Konstrukcijas veikiantys poveikiai dažniausiai yra cikliški (veikia pasikartojanti apkrova), todėl projektuojant statybines konstrukcijas (disertacijoje nagrinėjamu atveju – tamprius ir tampriai-plastinius lėkštus

- sferinius kevalus), būtina jų įtempių ir deformacijų būvį nagrinėti pasitelkus prisitaikomumo teoriją.
2. Prisitaikomumo teoriją įmanoma taikyti tik esant: tinkamam konstrukcijos diskretiniam modeliui, diferencialinių pusiausvyros lygčių pakeitimui tiesinėmis algebrinėmis lygtimis, netiesinių plastiškumo sąlygų taškiniam arba sąlygų visam elementui užrašymui, analizės uždavinių matematinių modelių korektiškam sudarymui. Tik tuomet galima prisitaikomumo teoriją susieti su šiuolaikinėmis kompiuterinėmis technologijomis.
  3. Sferinių kevalų projektavimas (įvertinant ir saugos, ir tinkamumo ribinius būvius), kai veikia kartotinė-kintamoji apkrova, dar nėra reikiamai teoriškai pagrįstas ir todėl yra nepakankamai išvystytas.

Taigi, norint prisitaikomumo teoriją taikyti statybos inžinerijos uždavinių sprendimui, reikia išspręsti šiuos uždavinius:

1. Plėtoti pusiausvirųjų baigtinių elementų (PBE) metodą sferinių kevalų diskretizacijai bei lygčių formulavimui.
2. Sudaryti prisitaikiusių sferinių kevalų optimizavimo uždavinių matematinius modelius (ekstreminiai energiniai mechanikos principai, matematinis programavimas), atsižvelgiant į saugos ir tinkamumo ribinius būvius.
3. Atlikti lyginamąją tampraus ir tampriai-plastinio kevalo uždavinių sprendimo rezultatų analizę (kitų mokslininkų skaitiniai eksperimentai, PBE metodas).



---

## Sferinių kevalų diskretizacija pusiausvrais baigtiniais elementais

Šiame skyriuje plėtojami tamprių, tampriai-plastinių diskretizuotų sferinių kevalų veikiant vienkartei apkrovai skaičiavimo metodika. Lėkšto sferinio kevalo diskretizacija atlikta žiediniais pusiausvrais baigtiniais elementais (PBE). Pateikiamas tamprių kevalų skaičiavimo analizė ir palyginimas su kitų autorių moksliniais darbais. Sistemos deformacijos mažos, t.y. geometrinių, pusiausvyros lygčių koeficientų matricos sudaromos jos pradiniam būviui. Skaičiavimo procese laikomasi mažų poslinkių prielaidos. Sferinio kevalo medžiagos yra idealiai tampri, tampriai-plastiška. Taip pat buvo atlikta lyginamoji analizė su kitų autorių moksliniais darbais. Rezultatai parodė, jog PBE skaičiavimo rezultatų tikslumas ir konvergencija yra gera net ir esant mažam baigtinių elementų skaičiui.

Skyriaus tematika buvo paskelbti 3 moksliniai straipsniai (Kalanta *et al.* 2012a; 2013; Ulitinas *et al.* 2013). Rezultatai buvo aprobuoti Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijoje „Mokslas – Lietuvos ateitis“ 2012 m. Vilniuje ir Tarptautinėje mokslinėje konferencijoje „Modern building materials, structures and techniques“ 2013 m. Vilniuje.

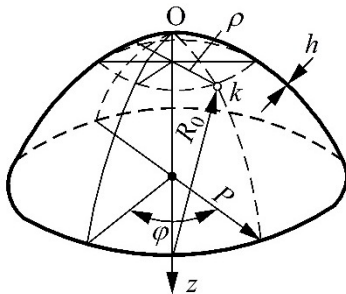
## 2.1. Pradinės pastabos ir prielaidos

Lėkštų sferinių kevalų įtempių ir deformacijų būvio analizės uždaviniai formuluojami kai: konstrukcijos, kurios fizikiniai parametrai (tamprumo modulis  $E$  ir Puasono koeficientas  $\nu$ ) bei geometriniai rodikliai (storis  $h$ , kreivumo spindulys  $R_0$  ar pakylės aukštis  $f_h$  ir pagrindo diametras  $L$ ) yra žinomi. Taip pat turi būti žinoma išorinė apkrova, jos pridėjimo vieta ir kraštinės sąlygos.

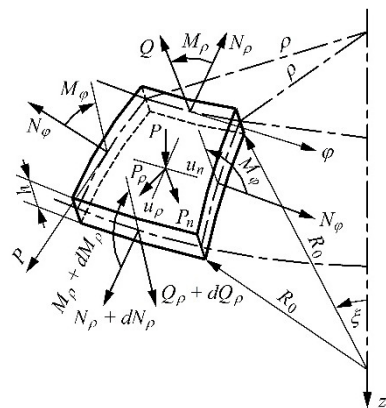
Šiame skyriuje išsamiai nagrinėjamas sferinio kevalo diskretizavimas žiediniais PBE, įgalinančiais vieninga metodika atlikti tiek tamprių, tiek tampriai-plastinių kevalų analizę (Kalanta 1994). Jame lenkimo momentai aprašomi antrojo, o ašinės jėgos – pirmojo laipsnio polinomis. Elemento statikos diferencialinės lygtys, nusakantios jo vidinių ir išorinių jėgų pusiausvyrą, pakeičiamos algebrinėmis taikant Bubnov-Galiorkino metodą (Fletcher 1984; Dube *et al.* 2001; Kress 2014), Naudojant sudarytas elemento statikos ir geometrinių lygčių išraiškas, suformuluotas viso sferinio kevalo poslinkių ir įrąžų analizės uždavinio matematinis modelis ir pasiūlytas skaičiavimo algoritmas.

## 2.2. Bendros žinios apie sferinio kevalo diskretinį modelį

Sferinio kevalo schema ir jame veikiančios įrąžos parodytos 2.1 ir 2.2 paveiksluose.



2.1 pav. Sferinio kevalo schema  
Fig. 2.1. Scheme of a spherical shell



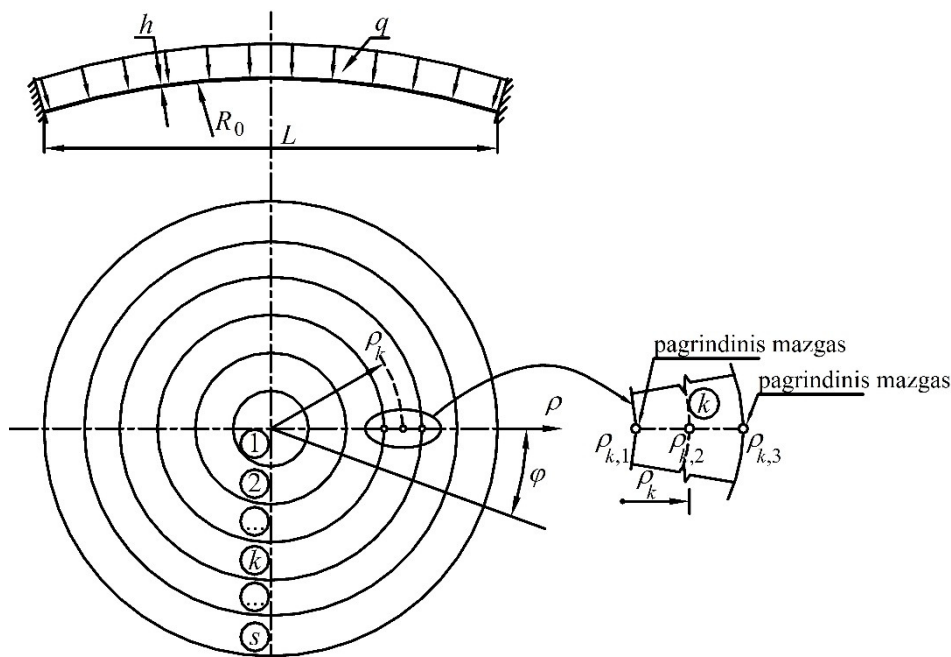
2.2 pav. Sferinio kevalo elemento įrąžos  
Fig. 2.2. Internal forces of element of a spherical shell



Sferinis kevalas nagrinėjamas polinėje koordinatinių sistemoje  $(\rho, \varphi, z)$ . Jos pradžia yra konstrukcijos centre. Užtenka ištirti tik vieną tokio kevalo spindulį, nes veikiant simetrinei apkrovai įrašos ir poslinkiai nepriklauso nuo koordinatės  $\varphi$ . Diskretizacijai naudojamas S. Kalantos pasiūlytas antros eilės žiedinis elementas (Kalanta 1994) su trimis mazgais (2.3 pav.).

Konstrukcija skaidoma į elementus, taip sferinis kevalas padengiamas skaičiuojamuoju tinklu. Parenkant skaičiuojamąjį tinklą, būtina atsižvelgti ne tik į geometrinę konstrukcijos formą, bet ir į apkrovos paskirstymą. Tampriuosiuose plastiniuose kevaluose, kurių analizei taikomas ir PBE metodas, ieškomos įrašų ir poslinkių greičių funkcijos gali turėti trūkių (būtina įvertinti energijos disipaciją ir jos greičių pokyčius trūkio linijose). Norint padidinti skaičiavimo rezultatų tikslumą, į šiuos trūkius reikia atsižvelgti. Tačiau tai galima padaryti tik elementų sujungimo paviršiuose, t. y. skaičiavimo tinklo linijose. Sudarant tokį konstrukcijos diskretinį modelį reikėtų laikytis šių taisyklių:

- a) skaičiuojamasis tinklas turi suskirstyti konstrukciją į sritis, kuriose fiziniai ir geometriniai parametrai, taip pat apkrovos intensyvumas yra pastovūs;



2.3 pav. Sferinio kevalo diskretizacija žiediniais elementais su trimis mazgais

Fig. 2.3. Discretization of the spherical shell by circular elements with three nodal points

- b) skaičiuojamojo tinklo linijos turi „užkloti“ prognozuojamas plastiškosios suirties ir apkrovos pasiskirstymo linijas, o koncentruotų jėgų pridėjimo vietos turi sutapti būtent su šio tinklo susikirtimo taškais, t. y. pagrindiniais mazgais;
- c) išpjovų kraštai turi būti užkloti skaičiuojamojo tinklo linijomis;
- d) atskirai paremti konstrukcijos mazgai, pavyzdžiui, ties kolonomis, turi sutapti su pagrindiniais elemento mazgais (taip paprasčiau įvertinamos kraštinės spalvos).

### 2.3. Sferinio kevalo diskretizacija pusiausviris baigtiniais elementais

Veikiant išorinei simetrinei paskirstytai apkrovai  $\mathbf{q}(\rho) \equiv [p_\rho(\rho) p_n(\rho)]^T$ , sferinio kevalo įtempių būvis aprašomas įrašų vektoriumi-funkcija  $\mathbf{S}(\rho) \equiv [M_\rho(\rho) M_\varphi(\rho) N_\rho(\rho) N_\varphi(\rho)]^T$ .

Įrašų vektorių komponentais yra lenkimo momentų  $M_\rho(\rho)$ ,  $M_\varphi(\rho)$  ir ašinių jėgų  $N_\rho(\rho)$ ,  $N_\varphi(\rho)$  intensyvumo funkcijos (jų teigiamos kryptys parodytos 2.2 pav.). Vektoriai-funkcijos  $\mathbf{S}(\rho)$  ir  $\mathbf{q}(\rho)$  susieti diferencialinėmis statikos lygtimis

$$\mathcal{A} \mathbf{S}(\rho) = \mathbf{q}(\rho). \quad (2.1)$$

Čia diferencialinis operatorius:

$$\mathcal{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} & \frac{1}{\rho} \\ -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} & -\frac{1}{R_0} & -\frac{1}{R_0} \end{bmatrix}.$$

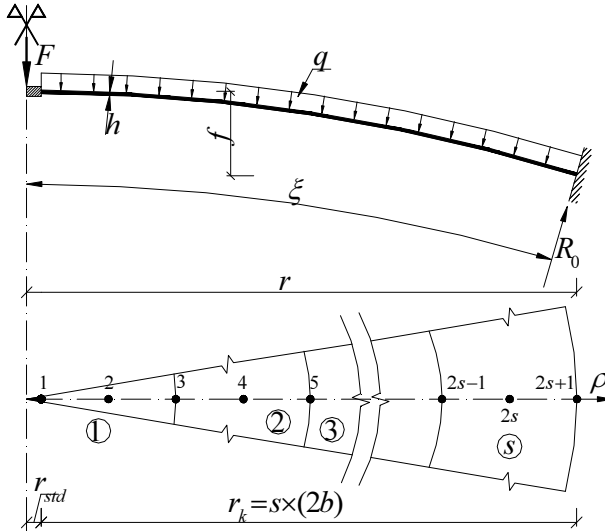
Kiekvienas kevalo žiedinis elementas pažymimas indeksu  $k=1,2,\dots,s$  ( $s$  – elementų skaičius), mazginiai elemente taškai indeksuojami  $i=1,2,3$  (2.4 pav.). Žiedinis elementas nagrinėjamas lokaliaje koordinačių  $\xi_k$  sistemoje. Ryšys tarp globalinės koordinatės  $\rho_k$  ir lokalinės koordinatės  $\xi_k$  nusakomas priklausomybėmis

$$\xi_k = (\rho_k - \rho_{k2}) / b_k; \quad \rho_k = \rho_{k2} + \xi_k b_k. \quad (2.2)$$

Čia  $2b_k$  – baigtinio elemento plotis;  $\rho_{k2}$  – antro mazgo koordinatė globalioje koordinačių sistemoje  $\rho, \varphi, z$ . Diskretinis kevalo modelis yra reguliarus, kai visų žiedinių elementų plotis  $2b_k$  yra vienodas.

Lenkimo momentai elemente aprašomi antrojo laipsnio polinomais su visų trijų mazgų lenkimo momentais  $\mathbf{M}_{\rho,k,i} = (M_{\rho,k,1} \ M_{\rho,k,2} \ M_{\rho,k,3})$  ir  $\mathbf{M}_{\varphi,k,i} = (M_{\varphi,k,1} \ M_{\varphi,k,2} \ M_{\varphi,k,3})$ , o ašinės jėgos – pirmojo laipsnio polinomais su dviejų mazgų ašinėmis jėgomis  $\mathbf{N}_{\rho,k,i} = (N_{\rho,k,1} \ N_{\rho,k,3})$  ir  $\mathbf{N}_{\varphi,k,i} = (N_{\varphi,k,1} \ N_{\varphi,k,3})$ :

$$\begin{aligned} M_{\rho,k}(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)M_{\rho,k,1} + (1 - \xi_k^2)M_{\rho,k,2} + \frac{1}{2}(\xi_k^2 + \xi_k)M_{\rho,k,3}, \\ M_{\varphi,k}(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)M_{\varphi,k,1} + (1 - \xi_k^2)M_{\varphi,k,2} + \frac{1}{2}(\xi_k^2 + \xi_k)M_{\varphi,k,3}, \\ N_{\rho,k}(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_k)N_{\rho,k,1} + \frac{1}{2}(1 + \xi_k)N_{\rho,k,3}, \\ N_{\varphi,k}(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_k)N_{\varphi,k,1} + \frac{1}{2}(1 + \xi_k)N_{\varphi,k,3}. \end{aligned} \quad (2.3)$$



2.4 pav. Lėkšto sferinio kevalo diskretizacija baigtiniais žiediniais elementais

Fig. 2.4. Discretization of the shallow spherical shell by circular elements

Visi kevalo diskretinio modelio elementai sujungiami kraštiniuose pagrindiniuose mazguose 3, 5, 7 ...  $2s + 1$  (2.4 pav.). Apkrova gali būti paskirstyta baigtinių elementų paviršiuje, taip pat sukoncentruota pagrindiniuose elementus

jungiančiuose mazguose bei standžiam diske (2.4 pav.). Daromos prielaidos, jog medžiagos fiziniai parametrai (tamprumo modulis  $E$ , Puasono koeficientas  $\nu$ ), kevalo storis  $h$  ir paskirstytos apkrovos intensyvumas  $q$  elemente ir yra pastovūs.

Įrašų funkcijos, nusakančios įtempių būvį, aproksimuojamos baigtinių elementų įrašų vektorių-funkcijų

$$\mathbf{S}_k(\xi) = \mathbf{H}_k(\xi) \mathbf{S}_k, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (2.4)$$

visuma.

Čia  $\mathbf{H}_k(\xi)$  – elemento įrašų interpoliacinė matrica, sudaroma lokaliųjų koordinačių  $\xi$  sistemoje;  $\mathbf{S}_k$  – elemento mazginių įrašų vektorius. 2.4 formulė atitinka (2.2)–(2.3) lygčių matricinę formą pavaizduotą 2.1 lentelėje.

Įrašų interpoliavimo taškais yra baigtinių elementų mazginiai taškai. Funkcijos (2.4) nežinomi koeficientai yra vekatoriaus  $\mathbf{S}_k$  komponentai. Tokiu būdu diskretinio modelio įtempių būvis vienareikšmiškai apibūdinamas įrašų mazginiuose taškuose vektoriumi  $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k, \dots, \mathbf{S}_s)^T$ . Šis Vektorius yra vienas iš kevalo skaičiavimo uždavinio nežinomųjų.

Elemente  $k$  įvedamas apibendrintų mazginių jėgų vektorius  $\mathbf{P}_k$  ir dualus jam mazginių taškų poslinkių vektorius  $\mathbf{u}_k$ . Kiekvieno jų komponentų skaičius  $m_k$  nusako elemento laisvumo laipsnį. Elemento vidinių jėgų  $\mathbf{S}_k$  darbas turi būti lygus elementą veikiančių išorinių jėgų  $\mathbf{P}_k$  darbui. Apibendrintosiomis jėgomis gali būti laikomos lokalinės (paskirstytos ploto vienetu) arba elemento pagrindiniuose mazguose veikiančios koncentruotosios jėgos. Pirmuoju atveju vektorių  $\mathbf{u}_k$  sudaro integraliniai viso elemento poslinkiai, antruoju atveju – dar ir lokaliniai pagrindinių mazginių taškų poslinkiai. Tuo būdu kevalo diskretinio modelio deformacijų būvį apibūdina globalinių poslinkių vektorius  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ . Čia  $m$  – diskretinio modelio laisvumo laipsnis. Ryšys tarp lokaliųjų  $\mathbf{u}_k$  ir globaliųjų  $\mathbf{u}$  poslinkių nusakomas lygybe:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{u}, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (2.5)$$

čia  $\mathbf{B}_k$  – kevalo  $k$ -ojo elemento poslinkių darnos matrica.

Apibendrintos jėgos ir poslinkiai turi būti parinkti taip, kad statikos lygtys poslinkių  $\mathbf{u}$  kryptimis būtų užtikrintos visuose elementų vidiniuose ir kraštiniuose mazguose.

Pateikus pagrindines bendrąsias žinias apie PBE, sudaromos kevalo žiedinio elemento pagrindinės priklausomybės ir skaičiavimo uždavinio matematinis modelis.

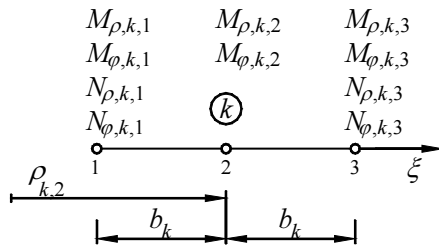
**2.1 lentelė.** Įrašų interpoliacinė matrica  $\mathbf{H}_k(\xi_k)$

**Table 2.1.** Matrix of internal forces  $\mathbf{H}_k(\xi_k)$

	$M_{\rho,k,1}$	$M_{\varphi,k,1}$	$N_{\rho,k,1}$	$N_{\varphi,k,1}$	$M_{\rho,k,2}$	$M_{\varphi,k,2}$	$M_{\rho,k,3}$	$M_{\varphi,k,3}$	$N_{\rho,k,3}$	$M_{\varphi,k,3}$
$M_{\rho,k}(\xi)$	$\frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)$				$1 - \xi_k^2$		$\frac{1}{2}(\xi_k^2 + \xi_k)$			
$M_{\varphi,k}(\xi)$		$\frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)$				$1 - \xi_k^2$		$\frac{1}{2}(\xi_k^2 + \xi_k)$		
$N_{\rho,k}(\xi)$			$\frac{1}{2}(1 - \xi_k)$						$\frac{1}{2}(1 + \xi_k)$	
$N_{\varphi,k}(\xi)$				$\frac{1}{2}(1 - \xi_k)$						$\frac{1}{2}(1 + \xi_k)$

## 2.4. Pusiausvirojo baigtinio elemento priklausomybės ir matricos

Žiedinio baigtinio elemento mazginių taškų įrašos pavaizduotos 2.5 paveiksle. Elemento įtempių būvis aprašomas mazginių įrašų vektoriumi  $\mathbf{S}_k = (\mathbf{S}_{k,1} \ \mathbf{S}_{k,2} \ \mathbf{S}_{k,3})$ , čia  $\mathbf{S}_{k,1} = (M_{\rho,k,1} \ M_{\varphi,k,1} \ N_{\rho,k,1} \ N_{\varphi,k,1})$ ,  $\mathbf{S}_{k,2} = (M_{\rho,k,2} \ M_{\varphi,k,2})$ ,  $\mathbf{S}_{k,3} = (M_{\rho,k,3} \ M_{\varphi,k,3} \ N_{\rho,k,3} \ N_{\varphi,k,3})$ .



2.5 pav. Žiedinio elemento mazgų (1, 2, 3) įrašos

Fig. 2.5. Internal forces of circular element nodes (1, 2, 3)

Apibendrintųjų vidinių jėgų vektoriaus  $\mathbf{P}_k = (\mathbf{P}_{k1}, \mathbf{P}_{ek}, \mathbf{P}_{k3})^T$  komponentai  $\mathbf{P}_{ki} = (\bar{M}_{\rho,ki}, \bar{N}_{\rho,ki}, \bar{Q}_{\rho,ki})^T$  yra  $k$ -ojo elemento mazgų  $i = 1, 3$  koncentruotosios jėgos (mazgo radialinis lenkimo momentas, ašinė ir skersinė jėgos);  $\mathbf{P}_{k1} = (P_{k1}, P_{k2}, P_{k3})^T$ ,  $\mathbf{P}_{k3} = (P_{k8}, P_{k9}, P_{k10})^T$  jėgomis aprašoma pusiausvyra tarp gretimų baigtinių elementų. Vektorius  $\mathbf{P}_{ek} = (P_{k4}, P_{k5}, P_{k6}, P_{k7})^T$  susideda iš pirmame ir trečiame elemento mazguose spindulio  $\rho$  ir elemento viduriniojo paviršiaus normalės kryptimis pridėtų jėgų, atitinkančių elemento vidinę pusiausvyrą. Jomis aprašomos elemento diferencialinės statikos lygtys (2.7). Vektoriaus  $\mathbf{u}_k$  komponentais yra elemento kraštinių mazgų linijiniai ir kampiniai poslinkiai, atitinkantys jo kraštines ir vidines statikos lygtis. Vieno elemento laisvumo laipsnis  $m_k = 10$ .

Įrašų interpoliavimo funkcijas (2.4) įrašant į lygtis (2.1), atlikus diferencijavimo veiksmus, gaunamos algebrinės baigtinio elemento vidinės pusiausvyros lygtys

$$\mathbf{A}_k(\xi_k) \mathbf{S}_k = \mathbf{q}_k. \quad (2.6)$$

Šių lygčių algebrinis operatorius  $\mathbf{A}_k(\xi_k)$  vienam baigtiniam elementui parodytas 2.2 lentelėje.

**2.2 lentelė.** Elemento statikos lygčių algebrinis operatorius  $\mathbf{A}_k^T(\xi_k)$

**Table 2.2.** The algebraic operator of the element's equilibrium equations  $\mathbf{A}_k^T(\xi_k)$

Kevalo įrašos	Jėgos atitinkančios elemento vidinę pusiausvyrą	
	$N_{k,l}$	$Q_{k,l}$
$M_{\rho,k,1}$		$-\frac{2\xi_k-1}{b_k(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)} - \frac{1}{b_k^2}$
$M_{\varphi,k,1}$		$\frac{\xi_k-0,5}{b_k(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)}$
$N_{\rho,k,1}$	$-\frac{1-\xi_k}{2(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)} + \frac{1}{2b_k}$	$-\frac{1}{2R_0}(1-\xi_k)$
$N_{\rho,k,1}$	$\frac{1-\xi_k}{2(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)}$	$-\frac{1}{2R_0}(1-\xi_k)$
$M_{\rho,k,2}$		$\frac{4\xi_k}{b_k(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)} + \frac{2}{b_k^2}$
$M_{\varphi,k,2}$		$-\frac{2\xi_k}{b_k(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)}$
$M_{\rho,k,3}$		$-\frac{2\xi_k+1}{b_k(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)} - \frac{1}{b_k^2}$
$M_{\varphi,k,3}$		$\frac{\xi_k+0,5}{b_k(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)}$
$N_{\rho,k,3}$	$-\frac{1+\xi_k}{2(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)} - \frac{1}{2b_k}$	$-\frac{1}{2R_0}(1-\xi_k)$
$N_{\varphi,k,3}$	$\frac{1+\xi_k}{2(\rho_{k,2}+\xi_k b_k)}$	$-\frac{1}{2R_0}(1-\xi_k)$

Operatorius  $\mathbf{A}_k(\xi_k)$  priklauso nuo koordinatės  $\xi_k$ , todėl elemento statikos lygtys sudaromos per elemento pagrindinių mazgų pusiausviros lygtis taikant Bubnovo-Galiorkino metodą (Agoshkov *et al.* 2006; Regalla 2010; Desai *et al.* 2011):

$$\mathbf{P}_{ek} = \mathbf{A}_{ek} \mathbf{S}_k = \mathbf{F}_{ek}. \quad (2.7)$$

Elemento pusiausviros lygčių koeficientų matrica  $\mathbf{A}_{ek}$  gaunama pagal formulę:

$$\mathbf{A}_{ek} = 2\pi b_k \int_{-1}^1 \mathbf{G}_k(\xi_k) \mathbf{A}_k(\xi_k) \mathbf{S}_k(\rho_{k,2} + \xi_k b_k) d\xi_k, \quad (2.8)$$

o elemento išorinių mazginių jėgų, ekvivalentiškų elemente paskirstytai apkrovai, vektorius  $\mathbf{F}_{ek}$ :

$$\mathbf{F}_{ek} = 2\pi b_k \int_{-1}^1 \mathbf{G}_k(\xi_k) \mathbf{q}_k(\rho_{k2} + \xi_k b_k) d\xi_k. \quad (2.9)$$

čia  $\mathbf{G}_k(\xi_k)$  – elemento įtakinės funkcijos matrica

$$\mathbf{G}_k(\xi_k) \equiv \begin{bmatrix} 0,5(1-\xi_k) & 0,5(1-\xi_k) \\ 0,5(1+\xi_k) & 0,5(1+\xi_k) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Elemento statikos lygčių koeficientų matrica  $\mathbf{A}_{ek}$  pateikta 2.3 lentelės 4–7 eilutėse. Jai atitinkančių išorinės apkrovos vektorius  $\mathbf{F}_{ek}$ :

$$\frac{2\pi b_k}{3} \begin{bmatrix} 3\rho_{k2} - b_k & 0 \\ 0 & 3\rho_{k2} - b_k \\ 3\rho_{k2} + b_k & 0 \\ 0 & 3\rho_{k2} + b_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{\rho,k} \\ p_{n,k} \end{bmatrix} = \mathbf{\eta}_k \mathbf{q}_k. \quad (2.11)$$

Apibendrintos jėgos  $\bar{M}_{\rho,ki}$ ,  $\bar{Q}_{\rho,ki}$  ir  $\bar{N}_{\rho,ki}$  išreiškiamos priklausomybėmis  $\bar{M}_{\rho,ki} = 2c\pi\rho_{ki}M_{\rho,ki}$ ,  $\bar{Q}_{\rho,ki} = -2c\pi\rho_{ki}Q_{\rho,ki}$ ,  $\bar{N}_{\rho,ki} = -2c\pi\rho_{ki}N_{\rho,ki}$ , kur pirmam mazgui ( $i = 1$ ) koeficientas  $c=1$ , o trečiam mazgui ( $i = 3$ )  $c=-1$ . Diskretinio modelio mazgo  $c$ , kuriame sujungti elementai  $k$  ir  $k+1$ , (2.5 pav.) statikos lygtys susideda iš lenkimo momentų, ašinių ir skersinių jėgų pusiausvyros lygčių:

$$\begin{aligned} 2\pi\rho_{k3}(-M_{\rho,k,3} + M_{\rho,k+1,1}) &= 0, \\ 2\pi\rho_{k3}(-N_{\rho,k,3} - N_{\rho,k+1,1}) &= 0, \\ 2\pi\rho_{k3}(Q_{\rho,k,3} - Q_{\rho,k+1,1}) &= 2\pi\rho_{k3}F_{n,c}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

čia  $F_{n,c}$  – žiede  $\rho_c$  paskirstytos normalinės apkrovos intensyvumas. Kevalo kraštinių mazgų (2.5 pav.) elemento statikos lygtys  $\mathbf{P}_{k1} = \mathbf{A}_{k1}\mathbf{S}_{k1}$  ir  $\mathbf{P}_{k3} = \mathbf{A}_{k3}\mathbf{S}_{k3}$  nurodytos elemento statikos lygčių koeficientų matricoje  $\mathbf{A}_k$  (2.3 lentelė) pirmose trijose ir paskutinėse trijose eilutėse. Taigi kevalo viso elemento statikos lygčių koeficientų matrica  $\mathbf{A}_k$  (2.3 lentelė) sudaro matricos submatricos  $[\mathbf{A}_{k1} \ \mathbf{A}_{ek} \ \mathbf{A}_{k3}]^T$ .



**2.3 lentelė.** Sferinio kevalo vieno baigtinio elemento statikos lygčių matrica  $\mathbf{A}_k$

**Table 2.3.** Statics equations matrix of the spherical shell element  $\mathbf{A}_k$

	$M_{\rho,k,1}$	$M_{\varphi,k,1}$	$N_{\rho,k,1}$	$N_{\varphi,k,1}$	$M_{\rho,k,2}$	$M_{\varphi,k,2}$	$M_{\rho,k,3}$	$M_{\varphi,k,3}$	$N_{\rho,k,3}$	$M_{\varphi,k,3}$
	$\rho_{k,1}$									
			$-\rho_{k,1}$							
	$1,5 \frac{\rho_{k,1}}{b_k} - 1$	1			$-2 \frac{\rho_{k,1}}{b_k}$		$\frac{\rho_{k,1}}{2b_k}$			
			$\frac{\rho_{k,2}}{2} - \frac{5b_k}{6}$	$\frac{2}{3}b_k$					$-\frac{\rho_{k,2}}{2} - \frac{b_k}{6}$	$\frac{1}{3}b_k$
	$-\frac{\rho_{k,2}}{b_k} + 2$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{b_k a^-}{3R_0}$	$-\frac{b_k a^-}{3R_0}$	$2 \frac{\rho_{k,2}}{b_k} - 2$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{\rho_{k,2}}{b_k}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{b_k \rho_{k,2}}{3R_0}$	$-\frac{b_k \rho_{k,2}}{3R_0}$
$2\pi$			$\frac{\rho_{k,2}}{2} - \frac{b_k}{6}$	$\frac{1}{3}b_k$					$-\frac{\rho_{k,2}}{2} - \frac{5b_k}{6}$	$\frac{2}{3}b_k$
	$-\frac{\rho_{k,2}}{b_k}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{b_k \rho_{k,2}}{3R_0}$	$-\frac{b_k \rho_{k,2}}{3R_0}$	$2 \frac{\rho_{k,2}}{b_k} + 2$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{\rho_{k,2}}{b_k} - 2$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{b_k a^+}{3R_0}$	$-\frac{b_k a^+}{3R_0}$
							$-\rho_{k,3}$			
									$\rho_{k,3}$	
	$\frac{\rho_{k,3}}{2b_k}$				$-2 \frac{\rho_{k,3}}{b_k}$		$1,5 \frac{\rho_{k,3}}{b_k} + 1$	-1		

čia:  $a^- = 2\rho_{k,2} - b_k$ ;  $a^+ = 2\rho_{k,2} + b_k$ .



**2.4 lentelė.** Sferinio kevalo vieno baigtinio elemento standumo matrica  $\mathbf{D}_k$

**Table 2.4.** Flexibility matrix of the spherical shell element  $\mathbf{D}_k$

$\frac{2\pi b_k}{15E_k t_k}$	$d_{11}$	$-d_{11}v_k$			$d_{12}$	$-d_{12}v_k$	$-d_{13}$	$d_{13}v_k$		
	$-d_{11}v_k$	$d_{11}$			$-d_{12}v_k$	$d_{12}$	$d_{13}v_k$	$-d_{13}$		
			$b_{11}$	$-b_{11}v_k$					$b_{12}$	$-b_{12}v_k$
			$-b_{11}v_k$	$b_{11}$					$-b_{12}v_k$	$b_{12}$
	$d_{12}$	$-d_{12}v_k$			$d_{22}$	$-d_{22}v_k$	$d_{23}$	$-d_{23}v_k$		
	$-d_{12}v_k$	$d_{12}$			$-d_{22}v_k$	$d_{22}$	$-d_{23}v_k$	$d_{23}$		
	$-d_{13}$	$d_{13}v_k$			$d_{23}$	$-d_{23}v_k$	$d_{33}$	$-d_{33}v_k$		
	$d_{13}v_k$	$-d_{13}$			$-d_{23}v_k$	$d_{23}$	$-d_{33}v_k$	$d_{33}$		
			$b_{12}$	$-b_{12}v_k$					$b_{22}$	$-b_{22}v_k$
			$-b_{12}v_k$	$b_{12}$					$-b_{22}v_k$	$b_{22}$

čia:

$$d_{11} = \frac{12}{h_k^2} (4\rho_{k2} - 3b_k); \quad d_{12} = \frac{24}{h_k^2} (\rho_{k2} - b_k); \quad d_{13} = \frac{12}{h_k^2} \rho_{k2};$$

$$d_{22} = \frac{192}{h_k^2} \rho_{k2}; \quad d_{23} = \frac{24}{h_k^2} (\rho_{k2} + b_k); \quad d_{33} = \frac{12}{h_k^2} (4\rho_{k2} + 3b_k);$$

$$b_{11} = 5(2\rho_{k2} - b_k); \quad b_{12} = 5\rho_{k2}; \quad b_{22} = 5(2\rho_{k2} + b_k).$$

čia  $E_k$ ,  $\nu_k$  – elemento  $k$  medžiagos tamprumo modulis ir Puasono koeficientas;  $h_k$  – elemento storis. Kevalo elemento pasiduodamumo matrica pateikta 2.4 lentelėje.

Matricos  $\mathbf{A}_k$  ir  $\mathbf{D}_k$  naudojamos sferinio kevalo elementų standumo matricoms sudaryti. Akivaizdu, kad jos priklauso nuo elementų padėties ir todėl kiekvienam elementui sudaromos atskirai. Tam tik reikia įstatyti į gautąsias išraiškas elemento plotį  $b_k$ , antro mazgo koordinatę  $\rho_{k2}$  ir fizinių parametrų reikšmes.

## 2.5. Sferinio kevalo lygčių diskretizavimas

Sudarius lygtis (2.7) visiems elementams ir lygtis (2.12) visiems pagrindiniams mazgams, gaunama kevalo diskretinio modelio algebrinių pusiausvyros lygčių sistema:

$$\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{F}. \quad (2.16)$$

Šių lygčių matricą  $\mathbf{A}$  galima skaičiuoti ir pagal formulę

$$\mathbf{A} = \overline{\mathbf{B}}^T \overline{\mathbf{A}}, \quad (2.17)$$

čia  $\overline{\mathbf{A}} = \text{diag} \mathbf{A}_k$  – kvazidiagonalinė matrica, kurios diagonalinius blokus yra matricos  $\mathbf{A}_k$ , o matrica  $\overline{\mathbf{B}}$  sudaryta iš poslinkių darnos lygčių (2.5) matricų  $\mathbf{B}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ .

Fizikinėmis lygtimis vadinamos tokios lygtys, kurios nusako ryšį tarp deformacijų  $\Theta$  ir poslinkių  $\mathbf{u}$ . Sakoma, kad kuriame tampraus sferinio kevalo taške galioja Huko dėsnis:

$$\Theta_k = \mathbf{D}_k \mathbf{S}_k, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (2.18)$$

o visų lygčių visuma

$$\Theta = \mathbf{D}\mathbf{S}, \quad (2.19)$$

čia  $\mathbf{D} = \text{diag} \mathbf{D}_k$  – kvazidiagonalinė pasiduodamumo matrica  $n \times n$ , kurios diagonaliniais blokais yra baigtinių elementų pasiduodamumo matricos  $\mathbf{D}_k$ .

Diskrečiojo modelio geometrinės lygtys sudaromos remiantis virtualiųjų jėgų principu. Jis teigia, jog išorinės ir vidinės jėgos įgijo statiskai galimus prieaugius  $\delta \mathbf{F}$  ir  $\delta \mathbf{S}$ , tenkinančius statikos lygtį  $\mathbf{A} \delta \mathbf{S} = \delta \mathbf{F}$ . Kadangi remiamės virtualiųjų jėgų principu, tai turi galioti išorinių ir vidinių darbų lygybės įvertinus pusiausvyros lygtis:

$$\Theta = \mathbf{A}^T \mathbf{u} . \quad (2.20)$$

Sferinio kevalo geometrinė darna, pasinaudojant fizikinėmis lygtimis (2.19), aprašoma tokia pilnutine geometrine lygtimi:

$$\mathbf{DS} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} . \quad (2.21)$$

## 2.6. Tamprus sferinio kevalo įrašų ir deformacijų pasiskirstymą

Sferinis kevalas yra dalijamas į pusiausvirus žiedinius elementus, kurie yra jungiami mazginiais taškais. Diskretinis kevalo modelis yra reguliarus, kai visų žiedinių elementų plotis yra vienodas. Apkrova gali būti paskirstyta baigtinių elementų paviršiuje, taip pat sukoncentruota pagrindiniuose mazguose ar standžiam diske. Sferinio kevalo diskretinio modelio algebrinių pusiausvyros lygčių sistema  $\mathbf{AS}_e = \mathbf{F}$ . Čia  $\mathbf{S}_e = [\mathbf{S}_{e1}, \mathbf{S}_{e2}, \dots, \mathbf{S}_{en}]$  diskretinio modelio tamprus kevalo skaičiavimo įrašų vektorius, kurį sudaro visų elementų mazginės įrašos. Atsižvelgiant į fizines lygtis  $\Theta_e = \mathbf{DS}_e$ , tamprus kevalo skaičiavimo konstrukcijos poslinkių  $\mathbf{u}_e = [\mathbf{u}_{e1}, \mathbf{u}_{e2}, \dots, \mathbf{u}_{em}]$  ir deformacijų  $\Theta_e = [\Theta_{e1}, \Theta_{e2}, \dots, \Theta_e]$  geometrinė darna aprašoma lygtimi  $\mathbf{DS}_e - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_e = \mathbf{0}$ .

### 2.6.1. Tamprus sferinio kevalo matematiniai modeliai

Tamprios konstrukcijos poslinkių ir įrašų analizės uždavinio matematinį modelį, taikant pusiausvirus baigtinius elementus, galima formuluoti remiantis pilnutinės potencinės energijos minimumo (Kastiljano) principu. Veikiant tik išorinei apkrovai ir atsižvelgiant į aprašytas priklausomybes Kastiljano principas išreiškiamas tokiu ekstreminiu uždaviniu:

*iš visų statiskai leistinų tamprųjų įrašų vektorių  $\mathbf{S}_e$  tikrasis yra tas, kuriam esant konstrukcijos deformacijos energija yra minimali*

$$\text{rasti} \quad \frac{1}{2} \mathbf{S}_e^T \mathbf{DS}_e \rightarrow \min , \quad (2.22)$$

$$\text{kai} \quad \mathbf{AS}_e = \mathbf{F}. \quad (2.23)$$

Jame nežinomasis yra tik tamprus kevalo skaičiavimo įrašų vektorius  $\mathbf{S}_e$ . Poslinkių reikšmės pateikia pusiausvyros lygčių Lagranžo daugikliai.

Pritaikius matematinio programavimo dualumo teorijos išvadas, gaunama kinematinė uždavinio formuluotė:

$$\text{rasti} \quad -\frac{1}{2} \mathbf{S}_e^T \mathbf{D} \mathbf{S}_e + \mathbf{u}_e^T \mathbf{F} \rightarrow \max, \quad (2.24)$$

$$\text{kai} \quad \mathbf{D} \mathbf{S}_e - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_e = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

Jame nežinomieji yra tamprių skaičiavimo įrašų vektorius  $\mathbf{S}_e$  ir tamprių poslinkių vektorius  $\mathbf{u}_e$ . Čia gautas įrašų vektorius visiškai sutampa su uždavinio (2.22)–(2.23) sprendiniu.

Pakeitus tikslo funkcijos (2.24) ženklą priešingu, uždavinys susiejamas su pilnutinės potencinės energijos minimumo principu

*Iš visų kinematiškai leistinų tampriųjų poslinkių  $\mathbf{u}_e$  tikrasis yra tas, kuris atitinka minimalią konstrukcijos pilnutinę energiją.*

Dažniausiai nustatyti tampriąsias įrašas  $\mathbf{S}_e$  ir tampriuosius poslinkis  $\mathbf{u}_e$  yra naudojamas paprastesnis matematinis modelis, pilnoji lygčių sistema:

$$\mathbf{A} \mathbf{S}_e = \mathbf{F}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{S}_e - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_e = \mathbf{0}. \quad (2.27)$$

Akivaizdu, kad šios lygčių sistemos sprendimas paprastesnis už ekstremumo nustatymo uždavinius. Pradžioje eliminuojamos tampraus skaičiavimo įrašos

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{u}_e. \quad (2.28)$$

Tuomet pusiausvyros lygtyse nežinomaisiais yra tampraus skaičiavimo poslinkiai:

$$\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{u}_e = \mathbf{F}. \quad (2.29)$$

Pažymėjus, kad  $\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{K}$ , gauname

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_e = \mathbf{F}, \quad (2.30)$$

čia  $\mathbf{K}$  vadinama globaliąja visos konstrukcijos standumo matrica. Sprendžiant lygtį (2.30) nustatomi tamprūs poslinkiai:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, \quad (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} = \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{u}_e = \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}. \quad (2.31)$$

Iš (2.28) lygties gaunamos tampraus skaičiavimo įrašos:

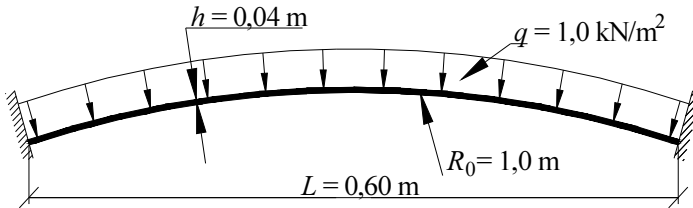
$$\mathbf{S}_e = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}, \quad \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{S}_e = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{F}. \quad (2.32)$$

PBE pilnoji lygčių sistema (2.26)–(2.27) tampa jungiamąja grandimi ir tampriai-plastinių sferinių kevalų skaičiavimui (Pham *et al.* 2003; Venskus *et al.* 2010; Atkočiūnas *et al.* 2011; Pallizollo *et al.* 2013).

### 2.6.2. Tampraus kevalo įrąžų skaitinė analizė

Nagrinėjamas standžiai įtvirtintas lėkštas sferinis kevalas, jo kreivumo spindulys  $R_0 = 1,0 \text{ m}$  (2.7 pav.). Kevalo medžiaga izotropinė, Poissono koeficientas 0,30.

Išorinės paskirstytos apkrovos intensyvumas  $q = 1,0 \text{ kN/m}^2$ .



2.7 pav. Tampriojo sferinio kevalo skaičiuojamoji schema  
Fig. 2.7. A computational scheme of an elastic spherical shell

Pirmiausia patikrinama, ar skaičiuojamasis kevalas yra lėkštas. Sferinio kevalo geometriniai parametrai susieti su lygtimi:

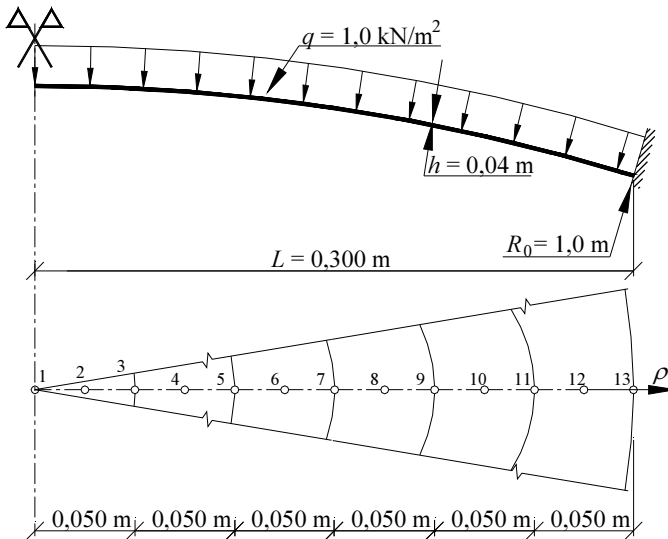
$$4f_h^2 - 8R_0f_h^2 + L^2 = 0. \quad (2.33)$$

Iš čia nustatomas pakylės aukštis:

$$f_h = \left( 8R_0 - \sqrt{64R_0^2 - 16L^2} \right) / 8 \approx 0,0461 R_0.$$

Kevalas yra lėkštas, kadangi santykis  $f_h/L = 0,0768 < 1/5$ .

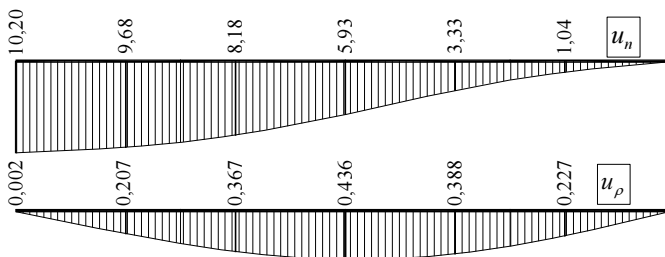
Kevalas suskirstomas į šešis vienodo pločio žiedinius elementus. Diskretinio modelio fragmentas parodytas 2.8 paveiksle. Pateiktos pagrindinių mazgų poslinkių reikšmės iki daugiklio  $qR_0/E$ . Įrąžų reikšmės pateiktos iki daugiklio  $qR_0$ . Elementų sujungimo mazguose įrąžų  $M_\varphi$  ir  $N_\varphi$  funkcijos turi nežymius trūkumus, todėl šių funkcijų reikšmės pagrindiniuose mazguose galima aproksimuoti jų aritmetiniu vidurkiu. Matyti, kad lenkimo momentai  $M_\rho$  ir  $M_\varphi$  yra labai nedideli, lyginant su ašinėmis jėgomis  $N_\rho$  ir  $N_\varphi$ .



**2.8 pav.** Sferinio kevalo diskretinio modelio fragmentas

**Fig. 2.8.** The discrete model fragment of spherical shell

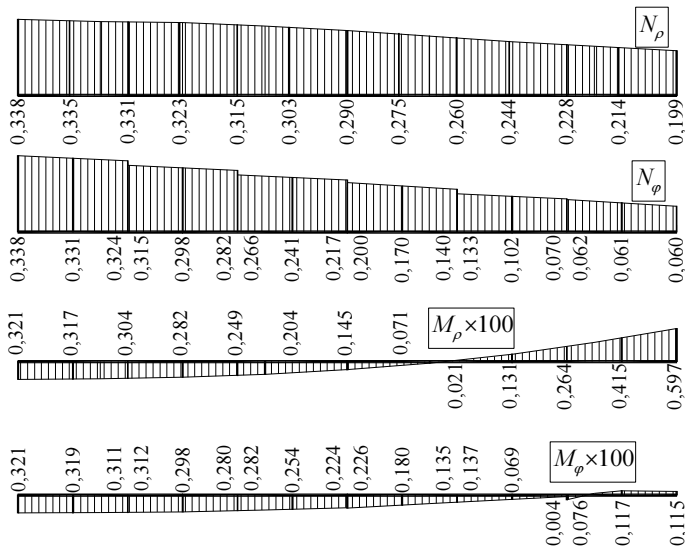
Buvo atlikta sukurto baigtinio elemento tikslumo analizė, naudojant 2,4,6, 12, ir 42 elementų tinklą (2.5 lentelė). Imant 2 elementus centrinio taško (1 mazgas) normalinis poslinkis  $u_{n1} = 10,261qR_0 / E$ , 4 elementų –  $u_{n1} = 10,221qR_0 / E$ , o sutankinto tinklo atveju (42 elementų) –  $u_{n1} = 10,209qR_0 / E$ . Pagal 2.5 lentelės duomenis matome kad, lenkimo momentų reikšmės sutankinto tinklo atveju nesiskiria nuo reikšmių, gautų esant 6 elementams. Tai įrodo PBE elementų didelį tikslumą. 6 baigtinių elementų įlinkių ir įrąžų pasiskirstymai pavaizduoti 2.9 ir 2.10 paveiksluose.



**2.9 pav.** Kevalo poslinkių (iki daugiklių  $qR_0 / E$ )

**Fig. 2.9.** Displacement of shell (up to the factors  $qR_0 / E$ )





**2.10 pav.** Kevalo įrašų reikšmės (iki daugiklių  $qR_0$ )  
**Fig. 2.10.** Internal forces of shell (up to the factors  $qR_0$ )

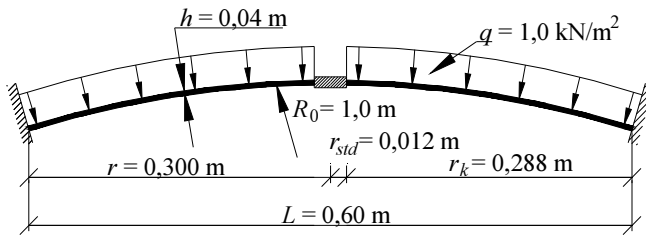
**2.5 lentelė.** Sferinio kevalo lenkimo momentai ir ašinės jėgos

**Table 2.5.** Bending moments and axial forces of the spherical shell

Elementų skaičius	Kevalo mazgas	$M_\rho \times 100$ (kNm/m)	$M_\phi \times 100$ (kNm/m)	$N_\rho$ (kN/m)	$N_\phi$ (kN/m)
2	centrinis	0,3137	0,3137	-0,3470	-0,3470
	vidurinis	0,1409	0,2203(0,2677)	-0,2888	-0,2306(-0,2012)
	kraštinis	-0,5949	-0,1526	-0,2012	-0,0260
4	centrinis	0,3205	0,3205	-0,3412	-0,3412
	vidurinis	0,1454	0,2252(0,2329)	-0,2904	-0,2198(-0,1973)
	kraštinis	-0,5947	-0,1680	-0,2010	-0,0298
6	centrinis	0,3211	0,3211	-0,3386	-0,3386
	vidurinis	0,1456	0,2242(0,2266)	-0,2904	-0,2167(-0,1999)
	kraštinis	-0,5950	-0,1735	-0,2010	-0,0357
12	centrinis	0,3213	0,3213	-0,3361	-0,3361
	vidurinis	0,1455	0,2230(0,2233)	-0,2904	-0,2127(-0,2038)
	kraštinis	-0,5953	-0,1773	-0,2009	-0,0455
24	centrinis	0,3214	0,3214	-0,3352	-0,3352
	vidurinis	0,1455	0,2226(0,2226)	-0,2904	-0,2105(-0,2059)
	kraštinis	-0,5954	-0,1783	-0,2009	-0,0522
42	centrinis	0,3214	0,3214	-0,3349	-0,3349
	vidurinis	0,1455	0,2224(0,2225)	-0,2904	-0,2095(-0,2069)
	kraštinis	-0,5954	-0,1785	-0,2009	-0,0555

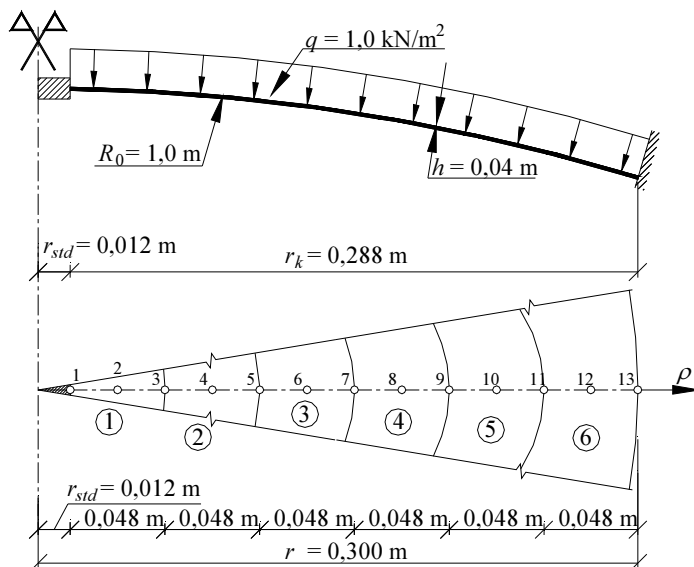
Ašinių jėgų reikšmės (iki daugiklio  $qR_0$ ) pateiktos 2.5 lentelėje, iš kurios matome, kad imant 6 elementus jau gaunami pakankamai tikslūs skaičiavimo rezultatai. 2.5 lentelės ketvirtame ir šeštame stulpelyje nurodytos dvi sferinio kevalo viduriniojo mazgo 7 (2.8 pav.) tampraus skaičiavimo įrašų reikšmės, atitinkančios dvi gretimųjų elementų mazgus. Matome, kad didinant elementų skaičių ašinės jėgos  $N_\varphi$  trūkia mažėja, o lenkimo momento  $M_\varphi$  net sutampa. Skaičiuojamoji analizė leidžia daryti išvadą, kad sukurtas kevalo elementas yra pakankamai tikslus. Ir tai patvirtina teiginį apie PBE didesnę tikslumą lyginant su poslinkiniais elementais. Todėl sukurtas elementas efektyviai gali būti panaudotas ir tamprųjų plastiškųjų kevalų analizei bei optimizavimui (Atkočiūnas *et al.* 2004).

### 2.6.3. Tampraus kevalo skaičiavimas: standaus disko įtaka



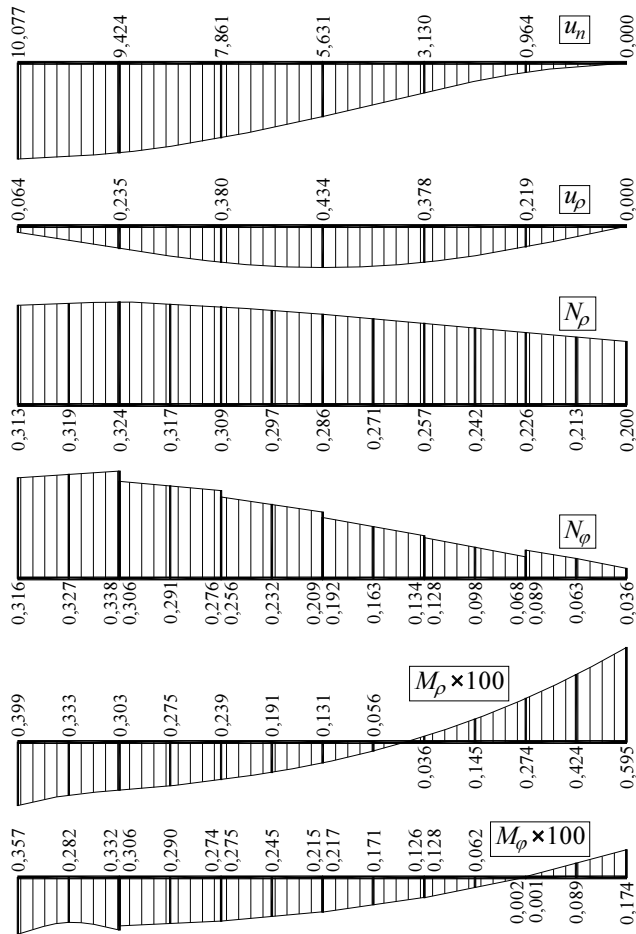
2.11 pav. Sferinis kevalas su standžiu disku veikiamas tolygiai paskirstytos apkrovos  $q$   
 Fig. 2.11. Spherical shell with a rigid disk under uniform load  $q$

Nagrinėjamas standžiai įtvirtintas kevalas su standžiu disku. Jis yra veikiamas normalinės simetriškai paskirstytos intensyvumo  $q$  apkrovos (2.11 pav.). Kevalo fizikiniai parametrai nesiskiria nuo nagrinėto kevalo 2.6.2 poskyryje. Kevalas taip pat skaidomas į 6 baigtinius elementus, tačiau dėl esančio standaus disko, kurio skersmuo  $d_{std} = 0,024$  m, baigtinio elemento plotis sumažėja iki 0,048 m. Diskretinio modelio fragmentas su standžiu disku pavaizduotas 2.12 paveiksle. Gautos tampraus skaičiavimo įrašų  $S_k = (M_{\rho k}, M_{\varphi k}, N_{\rho k}, N_{\varphi k})$  reikšmės pateiktos, kaip ir prieš tai skaičiuoto uždavinio be standaus disko, iki daugiklio  $qR_0$ , poslinkių reikšmės  $u_k = (u_{nk}, u_{\rho k})$  iki daugiklio  $qR_0/E$ . Atlikta lėkšto sferinio kevalo su standžiu disku ir be standaus disko įrašų ir poslinkių lyginamoji analizė. Poslinkių  $u_n$  ir  $u_\rho$  reikšmėms, jų pasiskirstymui standus diskas didesnės įtakos neturėjo ir skirtumas tesiekė 1,2 %.



**2.12 pav.** Sferinis kevalas su standžiu disku veikiamas diskretinio modelio fragmentas  
**Fig. 2.12.** A Fragment of discrete model of a spherical shell with a rigid disk

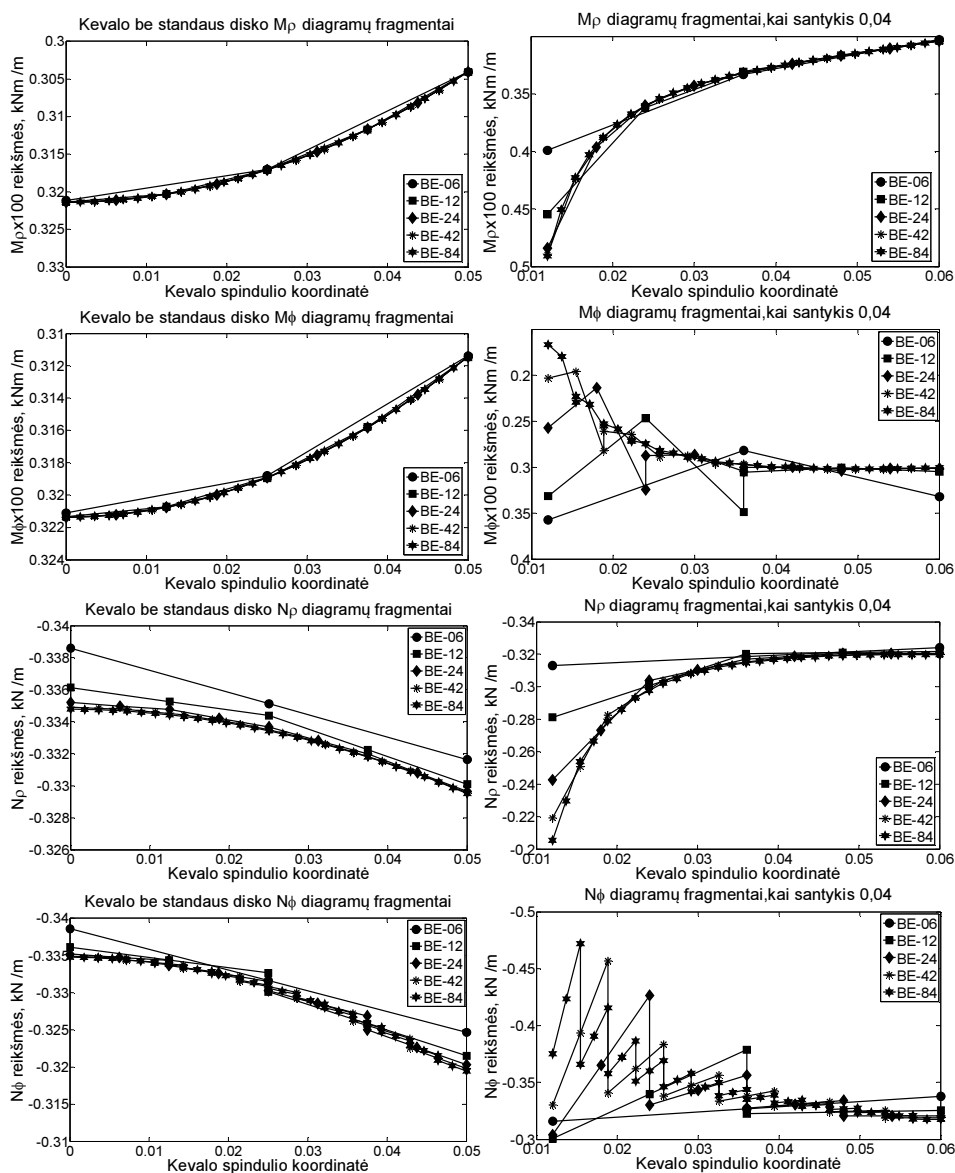
Tačiau tampraus kevalo skaičiavimo įrašų  $S_e$  reikšmėms standusis diskas jau turėjo gana nemažą įtaką. Didžiausia įtaka pasireiškia pirmojo baigtinio elemento. Tolstant nuo standaus disko tampraus kevalo skaičiavimo įrašos nuosekliai kinta ir atramoje (13-ame mazge) praktiškai sutampa. Išsamiau pakalbėkime apie kiekvieną iš įrašų  $M_{\rho k}, M_{\varphi k}, N_{\rho k}, N_{\varphi k}$  atskirai. Iš 2.13 paveikslo matome, jog standus disko dėka, ašinė jėga  $N_{\rho}$  iki 3 skaičiuojamo mazgo didėjo skirtingai nei pavaizduota 2.9 paveiksle, o sekančiuose mazguose einant link standžios atramos skirtumas mažėjo. Lenkimo momentų  $M_{\rho}$  standusis diskas įtakojo tik pirmąjį kevalo mazgą. Dėl standaus disko lenkimo momentai  $M_{\varphi}$  žiedine kryptimi padidėjo apie 10 %. Pastebėta, jog pirmojo baigtinio elemento viduriniame mazge momentas staiga sumažėjo, tačiau jau sekančiuose mazguose lenkimo momento reikšmių grafikas kito be didesnių šuolių. Apibendrinus galima teigti, jos standusis diskas įrašų skaičiavime didžiausią įtaką daro tik pirmajame baigtiniame elemente. Todėl detaliau panagrinėsime pirmojo baigtinio elemento standaus disko įtaką įrašoms.



2.13 pav. Kevalo su standžiu disku poslinkiai ir įrašos

Fig. 2.13. Displacement and internal forces of shell with a rigid disk

Buvo atlikta kevalo įrašų ir poslinkių analizė, esant skirtingiems baigtinių elementų skaičiui (6, 12, 24, 42, 84 baigtiniai elementai). Iš 2.14 paveikslą matyti, jog standus diskas turi nemažą įtaką įrašoms. Kevalo be standaus disko įrašų pasiskirstymas yra praktiškai tolygus esant ir mažesniai baigtinių elementų skaičiui (2.14 paveikslas kairiosios pusės diagramų stulpelis).

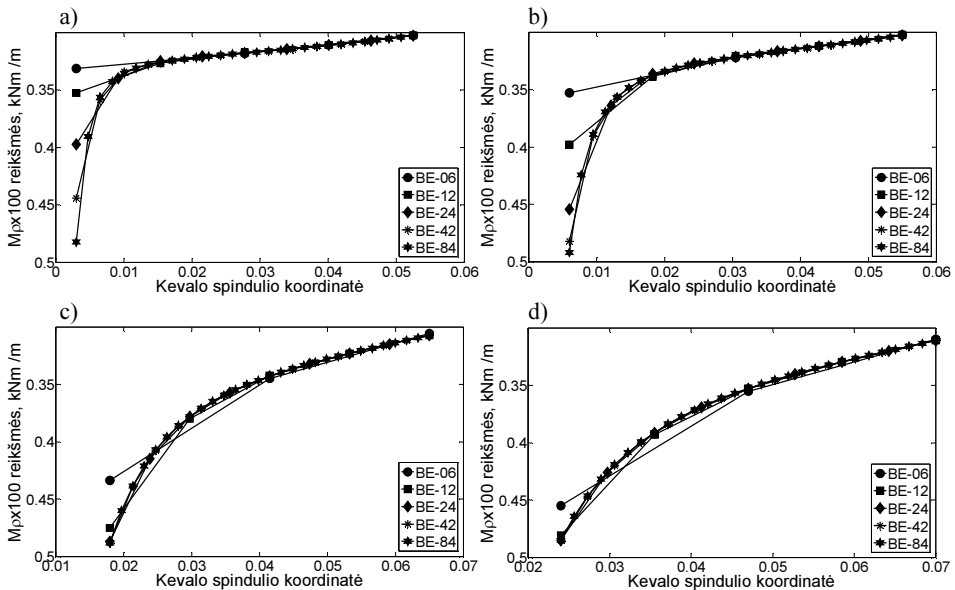


2.14 pav. Kevalo įrašų palyginimas (be standaus disko ir su standžiu disku)

**Fig. 2.14.** The comparison of internal forces of shell (without a rigid disk and with a rigid disk)

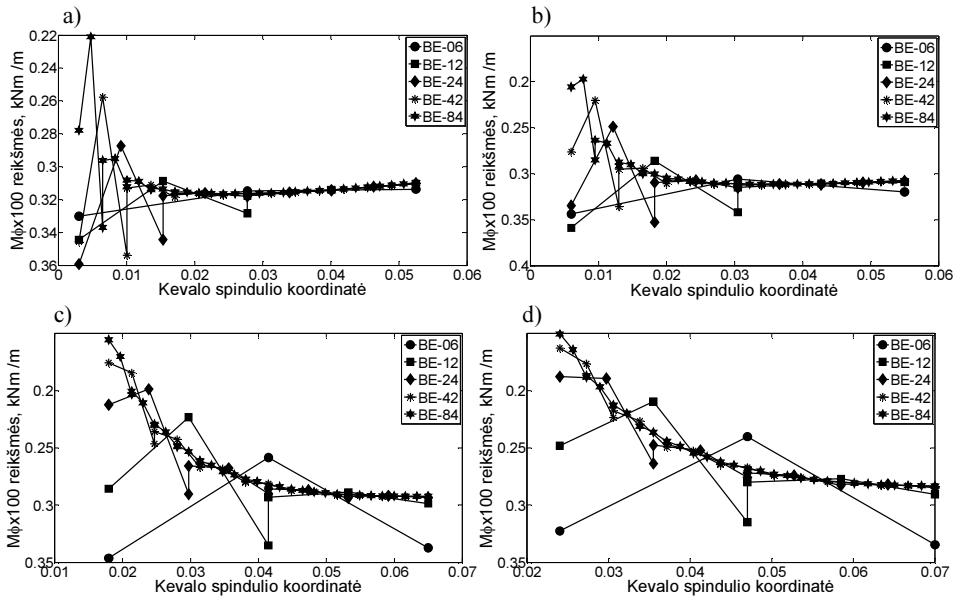
Skaiciuojant kevalą su standžiu disku ir panaudojant didesnę daugiau elementų, įrašos gaunamos artimos analitinio uždavinio sprendimo rezultatams. Standus diskas didžiausią įtaką daro žiedine kryptimi veikiančioms įrašoms  $M_\varphi$  ir  $N_\varphi$ . Didinant baigtinių elementų kiekį, diagramų trūkiai tarpelementiniame mazge išlieka nors ir mažėja.

Taip pat buvo analizuota, kokią įtaką standaus disko skersmuo turi tampriųjų įrašų skaičiavimui. Skaiciuojant tampriasis įrašas buvo lyginami rezultatai, kai standaus disko skersmuo  $d_{std}$  ir kevalo pagrindo atstumo  $L$  santykis  $d_{std}/L$  imamas 0,01; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08. Įrašų, kai santykis 0,04, reikšmės pateiktos 2.14 paveiklo dešinėsios pusės stulpelyje, o 2.15–2.18 paveikluose pateikiamos įrašų diagramų pokyčiai kintant standaus disko dydžiui atitinkamai kai santykiai yra 0,01; 0,02; 0,06; 0,08. Čia nagrinėjami įrašų pokyčiai tik pirmojo baigtinio elemento aplinkoje (2.12 pav.). Iš 2.18–2.18 paveikslų matyti, jog standaus disko dydis taip pat turi įtaką. Pradžioje apžvelkime radialinį lenkimo momento  $M_\rho$  reikšmes. Didėjant standaus disko skersmeniui  $d_{std}$  lenkimo momento reikšmė, ties pirmuoju mazgu (2.12 pav.) artėja prie tikrosios analitinio skaičiavimo reikšmės net ir esant mažam baigtinių elementų skaičiui. Esant mažesniai standaus disko skersmens  $d_{std}$  ir kevalo pagrindo  $L$  santykiui, esant mažesniai baigtinių elementų skaičiui radialinis lenkimo momentas  $M_\rho$  gaunamas mažesnis tik ties pirmuoju pirmojo baigtinio elemento mazgu.

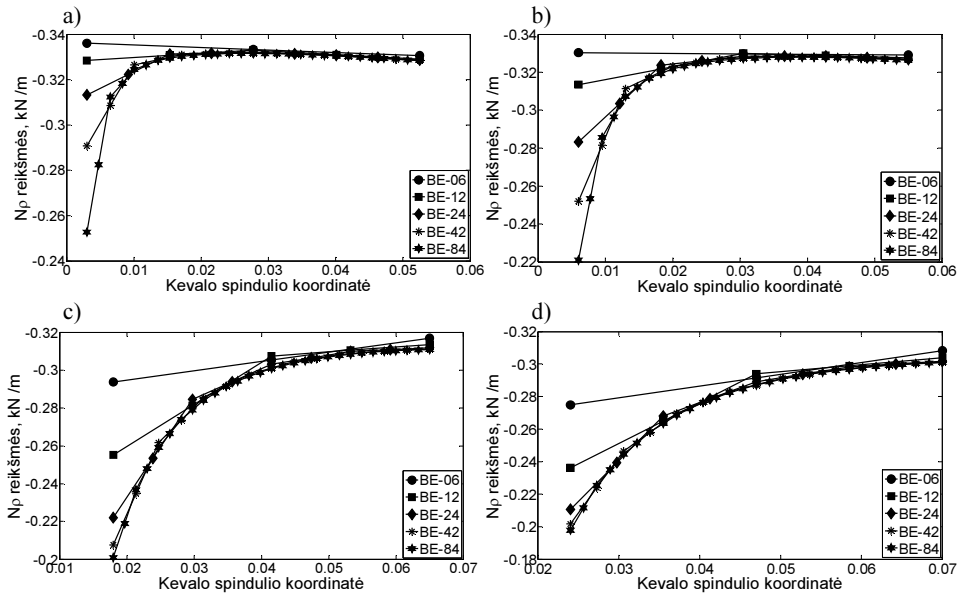


2.15 pav.  $M_\rho$  palyginimas: a)  $d_{std}/L = 0,01$ ; b)  $d_{std}/L = 0,02$ ; c)  $d_{std}/L = 0,06$ ; d)  $d_{std}/L = 0,08$

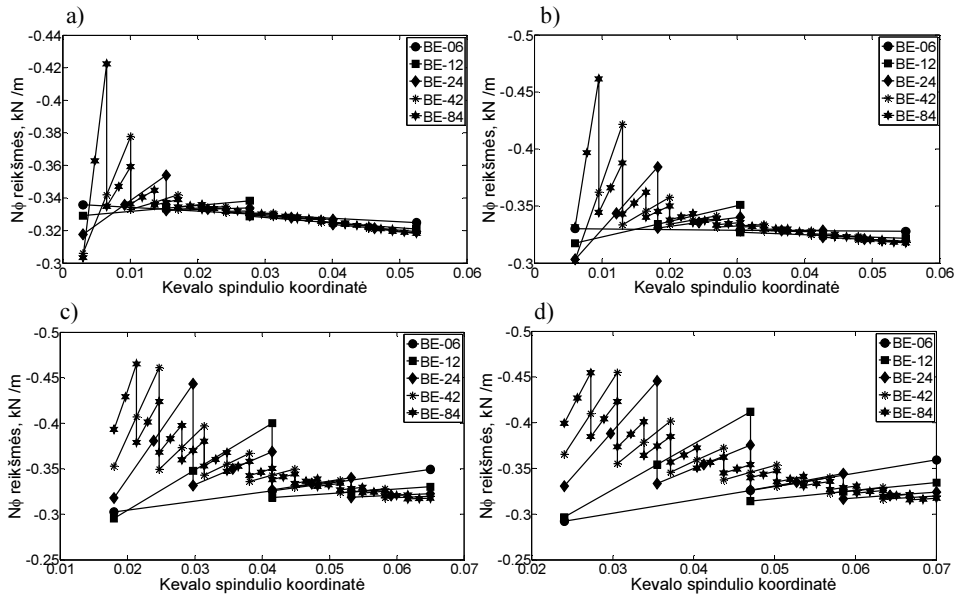
Fig. 2.15. Comparison of  $M_\rho$ : a)  $d_{std}/L = 0,01$ ; b)  $d_{std}/L = 0,02$ ; c)  $d_{std}/L = 0,06$ ; d)  $d_{std}/L = 0,08$



2.16 pav.  $M_\phi$  palyginimas: a)  $d_{std}/L = 0,01$ ; b)  $d_{std}/L = 0,02$ ; c)  $d_{std}/L = 0,06$ ; d)  $d_{std}/L = 0,08$   
**Fig. 2.16.** Comparison of  $M_\phi$ : a)  $d_{std}/L = 0,01$ ; b)  $d_{std}/L = 0,02$ ; c)  $d_{std}/L = 0,06$ ; d)  $d_{std}/L = 0,08$



2.17 pav.  $N_\rho$  palyginimas: a)  $d_{std}/L = 0,01$ ; b)  $d_{std}/L = 0,02$ ; c)  $d_{std}/L = 0,06$ ; d)  $d_{std}/L = 0,08$   
**Fig. 2.17.** Comparison of  $N_\rho$ : a)  $d_{std}/L = 0,01$ ; b)  $d_{std}/L = 0,02$ ; c)  $d_{std}/L = 0,06$ ; d)  $d_{std}/L = 0,08$

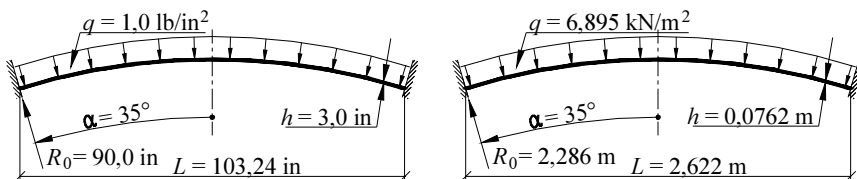


**2.18 pav.**  $N_\phi$  palyginimas: a)  $d_{std}/L = 0,01$ ; b)  $d_{std}/L = 0,02$ ; c)  $d_{std}/L = 0,06$ ; d)  $d_{std}/L = 0,08$   
**Fig. 2.18** Comparison of  $N_\phi$ : a)  $d_{std}/L = 0,01$ ; b)  $d_{std}/L = 0,02$ ; c)  $d_{std}/L = 0,06$ ; d)  $d_{std}/L = 0,08$

Jau ties antruoju baigtinio elemento mazgu įrašos sutampa su įrašomis, kurios yra gaunamos esant daug didesniui baigtinių elementų skaičiui. Analogiška situacija yra ir su ašinėmis jėgomis  $N_\phi$  veikiančiomis radialine kryptimi. Žiediniams lenkimo momentams  $M_\phi$  ir ašinėms jėgoms  $N_\phi$  įtakos neturi. Šių įrašų pasiskirstymą ir tikslumą lemia baigtinių elementų skaičius.

#### 2.6.4. Skaitinių eksperimentų lyginamoji analizė

Nagrinėjamas standžiai įtvirtintas kevalas veikiamas tolygiai paskirstytos apkrovos. Kevalo geometriniai parametrai pavaizduoti 2.19 paveiksle.



**2.19 pav.** Sferinis kevalas veikiamas tolygiai paskirstytos apkrovos  $q$   
**Fig. 2.19.** Spherical shell under uniform load  $q$



Fizikiniai parametrai yra: Puasono koeficientas  $\nu=1/6$ , tamprumo modulis  $E=2 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$  (13,79 GPa). Lyginamoji analizė atliekama, pasitelkus ir kitų autorių darbus, todėl neišvengiama matmenų vienetų įvairovė. Matavimo vienetų išraiškos į SI sistemos vienetus:  $1,0 \text{ in} = 0,0254 \text{ m}$ ;  $1,0 \text{ lb/in} = 175,13 \text{ N/m}$ ;  $1,0 \text{ lb/in}^2 = 6,895 \text{ kN/m}^2$ .

**2.6 lentelė.** Įlinkių ir įrašų reikšmės pagal Hinton *et al.* 2003

**Table 2.6.** Internal forces and displacement values using Hinton *et al.* 2003

Laisvumo laipsnis	Elementų tipas	$u_{n,\max}$		$N_\phi$ ties $\alpha = 0^\circ$		$M_\rho$ ties $\alpha = 35^\circ$	
		in	mm	lb/in	kN/m	lb in/in	kN m/m
16	tiesinis	0,93986	23,87	51,17	8,9640	19,02	0,0847
	kvadratinis	0,80398	20,39	47,69	8,3519	29,43	0,1310
	kubinis	0,81052	20,58	45,55	7,9872	34,46	0,1534
28	tiesinis	0,84731	21,52	48,51	8,4956	26,07	0,1161
	kvadratinis	0,41067	20,59	47,37	8,2959	33,29	0,1482
	kubinis	0,81192	20,62	46,95	8,2224	35,77	0,1592
52	tiesinis	0,82654	20,99	47,84	8,3782	29,45	0,1311
	kvadratinis	0,81183	20,62	47,33	8,2889	35,35	0,1574
	kubinis	0,81196	20,62	47,31	8,2854	36,39	0,1620

**2.7 lentelė.** Įlinkių ir įrašų reikšmės naudojant pusiausvirus baigtinius elementus

**Table 2.7.** Internal forces and displacement values equilibrium finite elements

PBE skaičius	Laisvumo laipsnis	$u_{n,\max}$ mm	$N_\phi$ ties $\alpha = 0^\circ$ kN/m	$M_\rho$ ties $\alpha = 35^\circ$ kN m/m
4	14	21,42	8,5122	0,1698
5	17	21,43	8,4936	0,1698
8	26	21,46	8,4665	0,1700
9	29	21,47	8,4622	0,1701
16	50	21,50	8,4498	0,1702
17	53	21,50	8,4491	0,1702

Iš 2.6 ir 2.7 lentelių matome, jog tampraus kevalo skaičiavimo rezultatai gerai sutampa. Tai rodo, kad sukurtojo PBE skaičiavimo tikslumas ir rezultatų konvergencija yra gera. Didesnis tikslumas PBE leidžia naudoti mažesnę skaičiuojamojo tinklo tankį ir tokiu būdu sumažinti uždavinio apimtį (pasiekiant norimą tikslumą). Tai itin svarbu įtempių ir deformacijos analizės ir kevalo parametrų optimizacijos uždavinių sprendimui. Tokio tipo uždavinių sėkmė labai priklauso nuo uždavinio dydžio t.y. nežinomųjų ir apribojimų skaičiaus.

## 2.7. Sferinių kevalų optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai

Tampriai-plastiniai sferiniai kevalai skaičiuojami naudojant technišką kevalų skaičiavimo teoriją. Uždaviniai sudaromi pagal idealiai tampriai-plastinio izotropinio kūno mechanikos ekstreminių energinių principus. Tokiu būdu randami sferinio kevalo įtempių ir deformacijų būviai. Tai netiesiniai matematinio programavimo uždaviniai (Nguyen-Dang *et al.* 1990; Bazaraa *et al.* 2006). Įrašų leistinumą sąlyga yra Mizeso plastiškumo kriterijus.

Vidurinis sferinio kevalo paviršius skaidomas į baigtinius elementus. Tampriai-plastinio skaičiavimo metu turime išskirti du skaičiuojamuosius pjūvius, esančius tarp gretimų baigtinių elementų sandūros mazgo (po kiekvieną pjūvį kiekvienam baigtiniam elementui). Bendras skaičiuojamųjų pjūvių skaičius  $i = 1, 2, \dots, \zeta$ . Parenkant sferinio kevalo diskretinio modelio įtempių ir deformacijų būvį, apibūdinančius jau aprašytus statinius bei kinematinis kintamuosius, kartu reikia atsižvelgti į statines ir kinematinės sąlygas. Įtempių ir deformacijų būvis bet kuriame pjūvyje apibūdinamas įrašų ir  $\mathbf{S}_i = (M_{\rho i}, M_{\phi i}, N_{\rho i}, N_{\phi i})^T$  deformacijų vektoriais  $\mathbf{\Theta}_i = (\kappa_{\rho i}, \kappa_{\phi i}, \varepsilon_{\rho i}, \varepsilon_{\phi i})^T$ . Tuomet visos sistemos diskretinis modelio vektoriai sudaromi taip:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_s)^T, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{\Theta} = (\mathbf{\Theta}_1, \mathbf{\Theta}_2, \dots, \mathbf{\Theta}_s)^T. \quad (2.35)$$

Kitą dualiųjų kintamųjų porą sudaro išorinės apkrovos vektorius  $\mathbf{F}$  ir poslinkiai  $\mathbf{u}$ . Šių vektorių komponentų skaičius lygus visos konstrukcijos diskretinio modelio laisvumo laipsnio skaičiui  $m$ .

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T. \quad (2.37)$$

Verta paminėti, jog skaičiuojant vienparametrės apkrovos atveju, vektorius  $\mathbf{F}$  bus sudaromas taip:

$$\mathbf{F} = \eta \mathbf{F} \quad (2.38)$$

čia  $\eta$  – žinomas išorinės apkrovos pasiskirstymo pobūdį ir kryptį apibūdinantis vektorius;  $F$  – išorinės apkrovos parametras.

### 2.7.1. Tampriai-plastinių sferinių kevalų takumo sąlygos

Konstrukcijos diskretinio modelio kiekvieno skaičiuojamojo pjūvio (elemento mazgo)  $i$ , įrašų leistinumo sąlyga grindžiama netiesine Mizeso plastiškumo kriterijaus sąlyga (Lelpe *et al.* 1995; 2002; Hein *et al.* 1999). Ji užrašoma taip:

$$\frac{16}{h^2}(M_{\rho i}^2 - M_{\rho i}M_{\varphi i} + M_{\varphi i}^2) + N_{\rho i}^2 - N_{\rho i}N_{\varphi i} - N_{\varphi i}^2 \leq N_{0i}^2, \quad (2.39)$$

arba matricine forma

$$\varphi_i \equiv N_{0i}^2 - \mathbf{S}_i^T \Phi_i \mathbf{S}_i \geq 0, \quad (2.40)$$

visiems  $i=1,2,\dots,\zeta$ . Čia  $N_{0i}$  – skaičiuojamojo pjūvio  $i$  ribinė įraša, t. y. membraninė ribinė ašinė jėga. Matrica

$$\Phi_i \equiv \begin{bmatrix} 16/h^2 & -8/h^2 & 0 & 0 \\ -8/h^2 & 16/h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

yra teigiamai apibrėžta, todėl sąlygos (2.41) yra iškilos žemyn. Mizeso plastiškumo kriterijaus sąlyga homogeninė, todėl ją galima taikyti ne tik analizės ir ribinės pusiausvyros uždaviniams, bet ir konstrukcijos parametrų optimizavimo uždaviniams.

Tarus, kad idealiai tampriai-plastiniai sistemai galioja holonominis dėsnis, plastinės deformacijos  $\Theta_{pi}$  aprašomos priklausomybe

$$\Theta_{pi} = 2\lambda_i \Phi_i \mathbf{S}_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, \zeta, \quad (2.42)$$

čia  $\lambda_i$  – plastiškumo daugiklis. Įrašų vektorių  $\mathbf{S}_i$  išreiškus tamprių  $\mathbf{S}_{ei}$  ir liekamųjų  $\mathbf{S}_{ri}$  įrašų suma ( $\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_{ei} + \mathbf{S}_{ri}$ ), konstrukcijos stiprumo sąlygos gali būti aprašomos visuma nelygybių

$$\varphi_i \equiv N_{0i}^2 - (\mathbf{S}_{ei} + \mathbf{S}_{ri})^T \Phi_i (\mathbf{S}_{ei} + \mathbf{S}_{ri}) \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, \zeta. \quad (2.43)$$

### 2.7.2. Ribinės pusiausvyros (apkrovos) optimizavimo ir analizės uždaviniai

Tamprios-plastinės konstrukcijos įrašų ir poslinkių analizės uždavinį, naudojant pusiausvirose elementus, galima formuluoti remiantis Haar-Karmano principu

(Zyczkowski 1981; Glowinski 2008), kuris nagrinėjama kevalui išreiškiamas tokiu ekstreminiu uždaviniu:

$$\text{rasti} \quad \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \rightarrow \min, \quad (2.44)$$

$$\text{esant sąlygomis} \quad \mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad (2.45)$$

$$\mathbf{S}_i^T \Phi_i \mathbf{S}_i \leq N_{0i}^2, \quad i = 1, 2, \dots, \zeta \quad (2.46)$$

**Ribinės apkrovos** optimizavimo uždavinyje siekiama nustatyti optimalų apkrovos paskirstymą, atitinkantį duotą ribinės įrašos  $N_0$  pasiskirstymą ir maksimalaus dydžio suminę apkrovą  $\mathbf{T}^T \mathbf{F}_0$ . Čia  $\mathbf{F}_0$  – optimizuojamų apkrovos parametrų vektorius. Bendru atveju dalis apkrovos komponentų gali būti fiksuoto dydžio. Tarkim, fiksuoto dydžio apkrovos pusiausvyros lygtyse aprašomos vektoriumi  $\mathbf{F}_c$ , o optimizuojamos apkrovos – vektoriumi  $\mathbf{F} = \eta \mathbf{F}_0$ . Tuomet ribinės apkrovos optimizavimo uždavinio matematinis modelis yra:

$$\text{rasti} \quad \mathbf{T}^T \mathbf{F}_0 \rightarrow \max \quad (2.47)$$

$$\text{esant sąlygomis} \quad -\mathbf{A} \mathbf{S} + \eta \mathbf{F}_0 = -\mathbf{F}_c \quad (2.48)$$

$$\mathbf{S}_i^T \Phi_i \mathbf{S}_i \leq N_{0i}^2, \quad i = 1, 2, \dots, \zeta \quad (2.49)$$

$$\mathbf{F}_0 \geq \mathbf{0}. \quad (2.50)$$

Šio netiesinio uždavinio sprendiniu yra vektoriai  $\mathbf{S}$  ir  $\mathbf{F}_0$ , atitinkantys optimalų ribinės apkrovos paskirstymą. Atlikus nežinomųjų pakeitimą gauname jog, liekamosios įrašos  $\mathbf{S}_r = \mathbf{S} - \mathbf{S}_e$  ir atsižvelgus į tai, kad  $\mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{A} \mathbf{S}_e + \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{F}$  ir  $\mathbf{S}_e^T \mathbf{D} \mathbf{S}_e = \text{const}$  bei  $\mathbf{S}_e^T \mathbf{D} \mathbf{S}_r = \mathbf{u}_e^T \mathbf{A} \mathbf{S}_r = 0$  ribinės apkrovos uždavinio matematinis modelis gali būti pertvarkomas taip, kad nežinomieji būtų liekamosios įrašos  $\mathbf{S}_r$  ir optimizuojamas apkrovos parametro vektorius  $\mathbf{F}_0$ .

$$\text{rasti} \quad \mathbf{T}^T \mathbf{F}_0 \rightarrow \max \quad (2.51)$$

$$\text{esant sąlygomis} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{S}_e = \alpha (\eta \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_c) \quad (2.53)$$

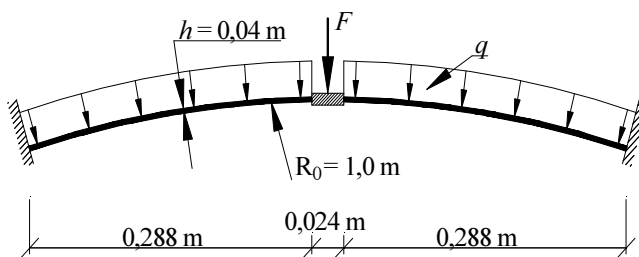
$$\mathbf{S}_{ri}^T \Phi_i \mathbf{S}_{ri} + 2 \mathbf{S}_{ei}^T \Phi_i \mathbf{S}_{ri} \leq \bar{N}_{0i}^2, \quad i = 1, 2, \dots, \zeta, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{F}_0 \geq \mathbf{0}. \quad (2.55)$$

Čia  $\bar{N}_{oi}^2 = N_{oi}^2 - \mathbf{S}_{ei}^T \Phi_i \mathbf{S}_{ei}$ . Kai apkrovos optimizavimo parametrų skaičius  $n_0 = 1$ , apkrovos optimizavimo uždaviniai tampa ribinės apkrovos parametro nustatymo uždaviniais.

### 2.7.3. Skaičiuojamųjų uždavinių tyrimai

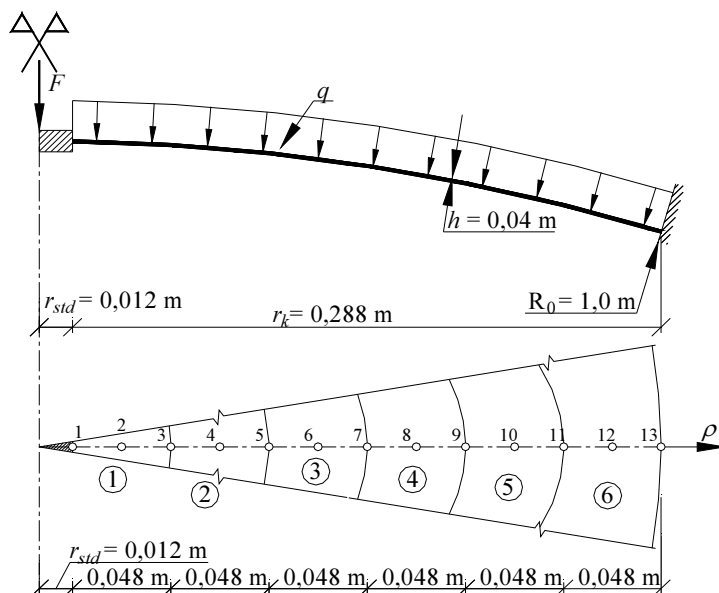
Šio skaičiuojamojo tyrimo tikslas – testuoti sferinio kevalo PBE ir iliustruoti kai kuriuos tyrimo rezultatus. Tyrimo nagrinėjimo objektu pasirinktas lėkštas,  $h = 0,04$  m storio standžiai įtvirtintas kevalas su standžiu disku (2.20 pav.), veikiamas apkrovų  $q$  ir  $F = 0,0829\pi q_1$ .



**2.20 pav.** Sferinio kevalo su standžiu disku skaičiuojamoji schema  
**Fig. 2.20** A computational scheme of a spherical shell with stiff disk

**1 uždavinys.** Atlikti tampraus kevalo elemento tikslumo ir skaičiavimo rezultatų konvergencijos tyrimą. Šiam tikslui pasiekti atlikta tampraus kevalo skaičiuojamoji analizė su įvairaus tankio baigtiniu elementų tinklu veikiant apkrovoms  $q = 1,0 \text{ kN/m}^2$  ir  $F = 1,0 \text{ kN}$ . Sferinio kevalo su standžiu disku diskretinis modelis su 6 baigtiniais elementais parodytas 2.20 pav. 2.8 lentelėje. pateiktos 1, 3 ir dešiniojo mazgų (13 mazgų pagal 6 elementų diskretinį modelį) normalinių poslinkių ir įrašų reikšmės 6, 12, 18, 24 ir 36 elementų diskretiniams modeliams: poslinkių iki daugiklių  $qR_0 / E$  ir  $F / ER_0$ , ašinių jėgų iki daugiklių  $qR_0$  ir  $F / R_0$ . 2.7 lentelėje ties ašinės jėgos radialine kryptimi nurodytos dvi sferinio kevalo 3-ojo mazgo (2.21 pav.) tampraus skaičiavimo įrašų reikšmės, atitinkančios dvi gretimųjų elementų mazgus. Lentelės duomenys iliustruoja, kad esant jau 6 elementų tinklui paskirstytos apkrovos atveju gaunami labai gero tikslumo skaičiavimo rezultatai visame kevale ir palyginus gero tikslumo koncentratoriaus aplinkoje – 1 mazge. Sutelktosios jėgos atveju, naudojant 6 elementų tinklą, koncentratoriaus aplinkoje gaunama pakankamo tikslumo poslinkio reikšmė, bet netiksli ašinės jėgos  $N_p$  reikšmė. Tačiau jau 3 mazge, esančiame  $r/6$  atstume nuo koncentratoriaus, ir tolimesniuose mazguose gauti

gana tikslūs skaičiavimo rezultatai. Tai rodo, kad PBE pakankamai tiksliai modeliuoja konstrukcijos tamprųjį būvį, net ir esant kocentratoriams.



**2.21 pav.** Sferinio kevalo diskretinis modelis

**Fig. 2.21.** A discrete model of a spherical shell

**2.8 lentelė.** Poslinkių ir ašinių reikšmės nuo paskirstytos apkrovos ir sutelktosios jėgos  
**Table 2.8.** Displacement and axial forces under distributed and concentrated load

PBE skaičius	Mazgo Nr.	Nuo paskirstytos apkrovos $q$			Nuo sutelktosios jėgos $F$		
		$u_n$	$N_p$	$N_\varphi$	$u_n$	$N_p$	$N_\varphi$
6	1	10,08	-0,313	-0,316	169,1	-4,292	-4,291
	3	9,424	-0,324	-0,338 (-0,306)	136,3	-4,287	-4,281 (-3,634)
	13	0,0	-0,200	-0,036	0,0	-2,043	-0,293
12	1	10,05	-0,281	-0,301	165,8	-3,650	-4,001
	3(5)	9,413	-0,321	-0,325 (-0,309)	135,4	-4,255	-4,015 (-3,687)
	13(25)	0,0	-0,200	-0,046	0,0	-2,036	-0,445
18	1	10,03	-0,258	-0,299	164,8	-3,190	-3,965
	3(7)	9,409	-0,321	-0,322 (-0,310)	135,2	-4,238	-3,946 (-3,718)
	13(37)	0,0	-0,200	-0,050	0,0	-2,033	-0,498
24	1	10,03	-0,243	-0,304	164,4	2,878	-4,068
	3(9)	9,407	-0,321	0,334 (-0,312)	135,1	-4,230	-3,914, (-3,738)
	13(49)	0,0	-0,200	-0,052	0,0	2,032	-0,525
36	1	10,03	-0,225	-0,321	164,2	-2,519	-4,411
	3(13)	9,405	-0,320	-0,320(-0,320)	135,0	-4,222	-3,884 (-3,763)
	13(73)	0,0	-0,200	-0,055	0,0	-2,030	-0,553

**2 uždavinys.** Sferinis kevalas, kurio skaičiuojamoji schema parodyta 2.20 paveiksle, veikiamas sutelktosios jėgos  $F$  ir paskirstytos apkrovos  $q$  Sferinio kevalo ribinė ašinė jėga  $N_0 = \text{const}$ . Reikia nustatyti optimalų šių apkrovų paskirstymą bei jį atitinkančias įrašų reikšmes ir atlikti įrašų analizę.

Optimalus ribinės apkrovos paskirstymas nustatomas pagal matematinį modelį (2.48)–(2.52). Siekiant atlikti elemento tikslumo tyrimą, naudojami kevalo diskretiniai modeliai su 6, 9 ir 12 baigtinių elementų (lentelė 2.9). Diskretinis modelis su 6 elementais parodytas 2.21 pav. Stiprumo sąlygos tikrinamos visuose elementų mazguose. Naudojant 6 elementų diskretinį modelį gautos optimalios apkrovų reikšmės  $F = 0$  ir  $q = 2,558N_0 / R_0$ . Stiprumo sąlygos tampa lygybėmis pirmojo elemento visuose mazguose, o visų kitų elementų – tik pirmame ir trečiame mazguose. Šių mazgų aplinkoje išsivysto plastinės deformacijos. Imant 9 ir 12 elementų diskretinius modelius gauta atitinkamai:  $F = 0$ ,  $q = 2,566N_0 / R_0$  ir  $F = 0$ ,  $q = 2,569N_0 / R_0$ . Galima teigti, kad imant 6 ir 12 elementų jau gaunamos tikslios ribinės apkrovos reikšmės, o esant 6 elementams intensyvumo  $q$  reikšmė skiriasi labai nežymiai (paklaida 0,43%).

2.9 lentelėje pateiktos ašinių jėgų reikšmės (iki daugiklio  $R_0$ ) taip pat iliustruoja gerą sukurto baigtinio elemento tikslumą tamprios-plastinės analizės uždaviniuose. Jos nurodytos diskretinių modulių bendriems mazgams (skliaustuose pažymėtos reikšmės mazgams kurie atitinka po du skaičiuojamuosius pjūvius). Lenkimo momentų reikšmės yra mažos, lyginant su ašinėmis jėgomis ir todėl nepateikiamos.

**2.9 lentelė.** Poslinkių ir ašinių reikšmės nuo paskirstytos apkrovos ir sutelktosios jėgos  
**Table 2.9.** Displacement and axial forces under distributed and concentrated load

Mazgas	6 elementai		9 elementai		12 elementų	
	$N_\rho$	$N_\phi$	$N_\rho$	$N_\phi$	$N_\rho$	$N_\phi$
1	-0,832	-0,841	-0,838	-0,847	-0,832	-0,846
3	-0,869	-0,914	-0,869	-0,902	-0,869	-0,893
3	-0,869	-0,892	-0,869	-0,892	-0,869	-0,891
5	-0,887	-0,930	-0,887	-0,928	-0,887	-0,928
5	-0,887	-0,925	-0,887	-0,926	-0,887	-0,927
7	-0,904	-0,958	-0,903	-0,945	-0,904	-0,954
7	-0,904	-0,922	-0,903	-0,945	-0,904	-0,937
9	-0,910	-0,933	-0,909	-0,920	-0,909	-0,911
9	-0,910	-0,797	-0,909	-0,830	-0,909	-0,845
11	-0,883	-0,744	-0,876	-0,701	-0,880	-0,657
11	-0,883	-0,514	-0,876	-0,477	-0,880	-0,450
13	-0,813	-0,373	-0,809	-0,370	-0,805	-0,371

Sprendžiant optimizavimo uždavinį (2.51)–(2.55) standžiose konstrukcijos srityse bendru atveju gali būti gaunamas ne vienintelis įrašų pasiskirstymas. Išsprendus analizės uždavinį (2.44)–(2.46) buvo nustatyta, kad 2.9 lentelės pateiktos įrašų reikšmės yra tikrosios.

Fiksuojant paskirstytos apkrovos intensyvumą  $q = 1,5N_0 / R_0$  ir sprendžiant optimizavimo uždavinį (2.51)–(2.55) nustatyta optimali jėgos reikšmė  $F = 0,0634N_0$ . Stiprumo sąlygos tampa lygybėmis tuose pačiuose diskretinio modelio mazguose, kaip ir sprendžiant pirmąjį optimizavimo uždavinį. Sprendžiant kevalo, veikiamo apkrovos  $q = 2,0N_0 / R_0 < 2,569N_0 / R_0$ , analizės uždavinį (2.44)–(2.46) nustatyta, kad plastinės deformacijos išsivysto tik 1 ir 13 magų aplinkoje.

## 2.8. Antrojo skyriaus išvados

1. Nustatyta, kad kevalų diskretizacijai racionalu naudoti žiedinį pusiausvirą baigtinį elementą (laisvumo laipsnis  $m_k = 10$ ) – juo patogiausia apibrėžti statiškai galimą įrašų pasiskirstymą.
2. Sukurtas pusiausviras baigtinis elementas, skirtas lėkštų simetriškai apkrautų tamprių sferinių kevalų analizei. Jame lenkimo momentai aprašomi antrojo, o ašinės jėgos – pirmojo laipsnio polinomais. Elemento diferencialinės statikos lygtys, nusakančios jo vidinių ir išorinių jėgų pusiausvyrą, pakeičiamos algebrinėmis.
3. Tamprus kevalo įrašoms nustatyti patogu naudoti Kastiljano principą (papildomos deformavimo energijos minimumo principas).
4. Sudarytasis elementas efektyvus: gali būti naudojamas ir tampriai-plastinių sferinių kevalų analizės bei optimizavimo uždaviniuose.
5. Suformuluoti kevalo tampaus ir tampriai-plastinio būvio analizės bei ribinės apkrovos optimizavimo uždavinių matematiniai modeliai (vienkartė apkrova).
6. Atlikti skaičiuojamieji tyrimai įrodo, jog sukurto elemento tikslumas yra labai geras: jais gautas įrašų pasiskirstymas yra artimas analitiniam sprendiniui. Skaičiavimo rezultatų konvergencija gerokai spartesnė, lyginant su kitų autorių skaičiuojamaisiais rezultatais (Hinton *et al.* 2003), gautais pasitelkus geometriškai darnius baigtinius elementus. Diskretizuojant pusiausvrais baigtniais elementais užtenka mažesnio baigtinių elementų kiekio.



---

## Sferinių kevalų prisitaikomumo būvio analizė ir optimizavimas ribojant poslinkius

Šis skyrius skirtas lėkštų idealiai tampriai-plastinių sferinių kevalų, prisitaikančių prie kartotinės-kintamosios apkrovos (KKA), ribinės jėgos  $N_0$  optimalaus pasiskirstymo nustatymui. KKA – tai sistema jėgų, iš kurių kiekviena ar kurių grupės gali kisti nepriklausomai viena nuo kitos. Apkrova laikoma kvazistatine, tai yra jokie dinaminiai jos veikimo efektai neįvertinami (Weichert *et al.* 2000; 2002). Kai veikia KKA, konstrukcija gali suirti dėl susikaupusių didelių plastinių deformacijų  $\Theta_p$  ar mažaciklio nuovargio. Paprastai, abiem atvejais tai vadinama cikline suirtimi. Optimizavimo uždavinio matematinio modelio sudarymo pagrindas yra tampriai-plastinių sferinių kevalų įtempių ir deformacijų būvių analizės uždavinys, papildomai įvertinant standumo sąlygas. Diskretizacijai naudojami pusiausviri žiediniai baigtiniai elementai, Mizeso plastiškumo kriterijaus sąlygos tikrinamos kiekvieno baigtinio elemento mazge ( $i=1, 2, 3$ ). Optimizavimo kriterijus yra  $L^T N_0$ , čia vektoriaus  $L$  komponentai yra baigtinių elementų plotai. Taip yra gaunamas netiesinis optimalaus  $N_0$  pasiskirstymo nustatymo matematinio programavimo uždavinys.

Skyriaus tematika yra paskelbtas (kartu su bendraautoriais) 1 straipsnis (Venskus *et al.* 2010).

### 3.1. Bendrosios pastabos

PBE naudojami dėl gero jų tikslumo: retesnis baigtinių elementų tinklas, mažesnė optimizavimo uždavinio apimtis, patikimas sprendimo rezultatas. Ypač tai aktualu sprendžiant tamprių plastinių kontinualių konstrukcijų netiesinius optimizavimo uždavinius, nes jų sprendimas savaime yra nemaža problema. Patirtis rodo, kad jų sprendimo sėkmė priklauso ir nuo uždavinio apimtys.

Konstrukcija, pradinuose apkrovos cikluose patyrusi plastines deformacijas  $\Theta_p$ , vėliau gali prisitaikyti prie apkrovos  $\mathbf{F}(t)$ : tuomet ciklinė plastiškoji suirtis tampa negalima. Būtent deformacijų  $\Theta_p$  įtakoje atsiranda liekamosios įrašos  $\mathbf{S}_r$ , kurios ir užtikrina, jog kintant apkrovai  $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{sup}$  naujos plastinės, deformacijos nebesivystys: tai yra konstrukcija prisitaikys (Atkočiūnas *et al.* 1981; Čyras 1983; Alyavdin *et al.* 2002; Alyavdin 2005; Atkočiūnas 2011). Ateityje tamprios konstrukcijos skaičiavimo kintamieji (įrašos  $\mathbf{S}_e$  ir poslinkiai  $\mathbf{u}_e$ ) darbe bus indeksuojami raide  $e$ , o liekamosios įrašos  $\mathbf{S}_r$ , deformacijos  $\Theta_r$  ir poslinkiai  $\mathbf{u}_r$  – indeksu  $r$ . Taigi, toliau konstrukcijos prisitaikomumo būvio įrašų ir poslinkių bei deformacijų analizės ir optimizacijos uždavinių formuluotėse patogiu išskirti liekamąsias įrašas  $\mathbf{S}_r$ , poslinkius  $\mathbf{u}_r$  ir deformacijas  $\Theta_r$  (prisitaikomumo būvio energiniai mechanikos principai būtent ir siejami su liekamosiomis įrašomis  $\mathbf{S}_r$  ir poslinkiais  $\mathbf{u}_r$ ). Lygtys (2.16), (2.19) ir (2.20) nepriklauso nuo sistemos medžiagos savybių, todėl tampriai-plastinei medžiagai jas galima užrašyti:

$$\mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \Theta_r, \Theta_r = \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \Theta_p, \quad (3.1)$$

čia  $\mathbf{S}_r = [S_{r1} \ S_{r2} \ \dots \ S_{rm}]^T$  – sau pusiausvirų liekamųjų įrašų,  $\mathbf{u}_r = [u_{r1} \ u_{r2} \ \dots \ u_{rm}]^T$  – liekamųjų poslinkių,  $\Theta_r = [\Theta_{r1} \ \Theta_{r2} \ \dots \ \Theta_{rm}]^T$  – liekamųjų deformacijų,  $\Theta_p = [\Theta_{p1} \ \Theta_{p2} \ \dots \ \Theta_{pn}]^T$  – plastinių deformacijų vektoriai.

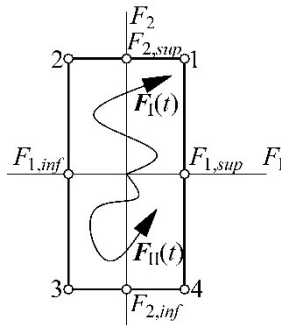
Tamprūs konstrukcijos skaičiavimo poslinkiai  $\mathbf{u}_e(t)$  ir įrašos  $\mathbf{S}_e(t)$  nustatomi, pasitelkus poslinkių ir įrašų influentines matricas  $\beta$ ,  $\alpha$ :

$$\mathbf{u}_e(t) = \beta \mathbf{F}(t), \mathbf{S}_e(t) = \alpha \mathbf{F}(t), \quad (3.2)$$

čia liekamųjų poslinkių ir liekamųjų įrašų influentinės matricos:

$$\beta = (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1}, \alpha = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \beta. \quad (3.3)$$

Jei konkreti apkrovimo istorija  $\mathbf{F}(t)$  nenagrinėjama, tuomet tenka ją apibrėžti nuo laiko  $t$  nepriklausančiomis savo kitimo ribomis  $\mathbf{F}_{sup} = [F_{1,sup}, F_{2,sup} \dots F_{m,sup}]^T$  ir  $\mathbf{F}_{inf} = [F_{1,inf}, F_{2,inf} \dots F_{m,inf}]^T$ , kai  $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{sup}$  (3.1 pav.).



**3.1 pav.** Dviejų jėgų  $F_1, F_2$  galima kitimo sritis ( $j = 1, 2, 3, 4$  – išorinės hodografo viršūnės)

**Fig. 3.1.** The possible variation domain of two forces  $F_1, F_2$  ( $j = 1, 2, 3, 4$  – the external apexes of locus)

Taip gaunama apkrovų kitimo sritis – iškilas daugiasienis, kurio viršūnių aibė yra  $j \in J$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ,  $p = 2^\tau$ ). Čia  $\tau$  – kartotinės-kintamosios apkrovos komponentų skaičius. Kiekviena viršūnė  $j$  atitinka apkrovos kombinaciją  $\mathbf{F}_j$ :  $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}_j \leq \mathbf{F}_{sup}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ .

Taigi tampraus skaičiavimo įrašos  $\mathbf{S}_{e,j}$  ir tampraus skaičiavimo poslinkiai  $\mathbf{u}_{e,j}$  yra gaunami pasinaudojant (3.2) išraiškomis:

$$\mathbf{S}_{e,j} = \alpha \mathbf{F}_j, \mathbf{u}_{e,j} = \beta \mathbf{F}_j, j \in J. \quad (3.4)$$

Tuo būdu prisitaikomumo būvyje suminės įrašos ir liekamieji poslinkiai, susideda iš tampraus skaičiavimo įrašų ir poslinkių:  $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{e,j} + \mathbf{u}_r$ ;  $\mathbf{S}_j = \mathbf{S}_{e,j} + \mathbf{S}_r$ .

Baigtiniui elementui  $k$  ribinė įraša  $N_{0k}$  ( $k \in K$ ) yra laikoma pastovia, todėl  $N_{0k}(x) = const$ . Jeigu vienalyčiame  $h$  aukščio skerspjūvyje takumo įtempiai  $f_y$  pasiskirstę pastoviai, tai  $N_0 = f_y h$ . Pažymėjus membraninę ašinę jėgą  $(N_0)^2 = C_0$ , tai netiesinės takumo sąlygos visam kevalui įgauna pavidalą

$\varphi = C_0 - f(S_{e,j} + S_r) \geq 0$ . Jos užrašomos kiekvieno baigtinio elemento  $k$  mazgui  $l$  ir kiekvienai tampiųjų įrašų  $S_{e,j}$  hodografo (3.4) viršūnei  $j$ :

$$\varphi_{kl,j} = C_{0k} - f_{kl,j}(S_{ekl,j} + S_{rkl}) \geq 0, \quad k \in K, \quad l \in L, \quad j \in J. \quad (3.5)$$

Netiesinės takumo sąlygos tikrinamos kiekviename  $k$ -jo baigtinio elemento mazginiame taške  $l$  visoms apkrovos kombinacijoms  $j \in J$ . Labiau apibendrintai galima užrašyti, jeigu takumo sąlygos rašomos kiekvienam skaičiuojamajam pjūviui  $i \in I$ , kiekvienai apkrovimo kombinacijai  $j \in J$ :  $\varphi_{i,j} = C_{0i} - f_{i,j}(S_{ei,j} + S_{ri}) \geq 0$ . Tada takumo sąlygos visai konstrukcijai yra

$$\varphi_j = C_0 - \mathbf{f}_j(S_{e,j} + S_r) \geq 0, \quad j \in J. \quad (3.6)$$

Tokiu būdu realizuojamos takumo sąlygos  $\mathbf{f}(\mathbf{S}(t)) \leq C_0$  arba  $\mathbf{f}(\mathbf{S}_e(t) + \mathbf{S}_r) \leq C_0$ , tiesiogiai išvengiant apkrovimo istorijos  $\mathbf{F}(t)$  nagrinėjimo (tam ir pasitelkiami tamprus skaičiavimo vektoriai  $S_{e,j}$ ).

Statiškai leistinos įrašos  $S_r$  turi tenkinti pusiausvyros lygtis (3.1) ir takumo sąlygas (3.6). Kinematiškai galimi liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r$  tenkina geometrines lygtis (3.1) ir kinematikos kraštines sąlygas:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{S}_r + \Theta_p. \quad (3.7)$$

Prisitaikomumo būvyje plastinių deformacijų vektoriaus  $\Theta_p = (\Theta_{pkl})^T$  komponentai yra skaičiuojami pagal formulę:

$$\Theta_{pkl} = \sum_j \left[ \nabla \varphi_{kl,j}(S_{ekl,j} + S_{rkl}) \right]^T \lambda_{kl,j}, \quad \lambda_{kl,j} \geq 0. \quad (3.8)$$

Formulėje (3.8) reiškinys  $\left[ \nabla \varphi_{kl,j}(S_{ekl,j} + S_{rkl}) \right]^T = \left[ \frac{\partial f_{kl,j}(S_{ekl,j} + S_{rkl})}{\partial S_{rkl}} \right]$  yra takumo sąlygų (3.5) arba (3.6) gradientų matrica,  $\lambda_{kl,j}$  – plastinių daugiklių vektorius visiems  $k \in K, l \in L, j \in J$ .

Konstrukcijos prisitaikymo būvio liekamosios deformacijos  $\Theta_r = \mathbf{S}_r + \Theta_p$  ir liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r$  gali būti ne vieninteliai: jie priklauso nuo konkrečios apkrovimo istorijos  $\mathbf{F}(t)$ , kurią realizavus ir buvo pasiektas prisitaikymo būvis. Tuo būdu, jei apkrova užduota tik jos kitimo ribomis  $\mathbf{F}_{inf}, \mathbf{F}_{sup}$ , tikslų liekamųjų poslinkių reikšmių skaičiavimas tampa problematiniu dėl skerspjuvių galimo nusikrovimo reiškinio: Liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r$  tuomet kinta nemonotoniškai,

todėl galima apskaičiuoti tik jų kitimo apatinės  $\mathbf{u}_{r,inf}$  ir viršutinės  $\mathbf{u}_{r,sup}$  ribas  $\mathbf{u}_{r,inf} \leq \mathbf{u}_r(t) \leq \mathbf{u}_{r,sup}$  (Lange-Hansen 1998; Atkočiūnas *et al.* 2011). Poslinkių įvertinimas statybinėms konstrukcijoms, pasireiškus liekamiesiems poslinkiams (gelžbetoninėse konstrukcijose plyšiams), apskritai yra sudėtingas (Kaklauskas *et al.* 2012).

### 3.2. Tampriai-plastinio pristaikančio sferinio kevalo takumo sąlygos

Konstrukcijos diskretinio modelio kiekvieno skaičiuojamojo pjūvio  $i$  įrašų leistinumo sąlyga, prisitaikomumo būvyje, grindžiama netiesine Mizeso plastiškumo kriterijaus sąlyga (Eraslan 2002; Chakraborty 2006). Ji užrašoma taip:

$$\frac{16}{h^2}(M_{\rho i,j}^2 - M_{\rho i,j}M_{\phi i,j} + M_{\phi i,j}^2) + N_{\rho i,j}^2 - N_{\rho i,j}N_{\phi i,j} - N_{\phi i,j}^2 \leq (N_{0i})^2 \quad (3.9)$$

arba matricine forma

$$\varphi_i \equiv (N_{0i})^2 - (\mathbf{S}_{i,j})^T \boldsymbol{\Phi}_i (\mathbf{S}_{i,j}) \geq 0, \text{ visiems } i \in I, i = 1, 2, \dots, s, j \in J \quad (3.10)$$

čia  $N_{0i}$  – skaičiuojamojo pjūvio  $i$  ribinė įraša, t. y. membraninė ribinė ašinė jėga. Simetrinė matrica  $\boldsymbol{\Phi}_i$  atitinka matrica (2.41).

Takumo sąlygas (3.10) sferiniams kevalams prisitaikomumo būvyje patogiau išreikšti per įrašų vektorių  $\mathbf{S}_{i,j}$ . Įrašų vektoriumi  $\mathbf{S}_{i,j}$  gaunamas, sumuojant tamprus kevalo skaičiavimo  $\mathbf{S}_{ei,j}$  ir liekamųjų įrašų  $\mathbf{S}_{ri}$  vektorius  $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri}$ . Tuomet kevalo takumo sąlygas galima apibūdinti nelygybe

$$\varphi_i \equiv (N_{0i})^2 - (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri})^T \boldsymbol{\Phi}_i (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri}) \geq 0 \text{ visiems } i = 1, 2, \dots, \zeta, j \in J. \quad (3.11)$$

Taigi žinodami jog  $\mathbf{S}(\rho) = [M_\rho M_\phi N_\rho N_\phi]^T$ , tai galutinai užrašome Mizeso plastiškumo kriterijaus sąlygą kevalo  $i$ -jam skaičiuojamajam pjūviui:

$$\begin{aligned} \frac{16}{h^2} \Big( (M_{\rho,ei,j} + M_{\rho,ri})^2 - (M_{\rho,ei,j} + M_{\rho,ri})(M_{\phi,ei,j} + M_{\phi,ri}) + (M_{\phi,ei,j} + M_{\phi,ri})^2 \Big) + \\ + (N_{\rho,ei,j} + N_{\rho,ri})^2 - (N_{\rho,ei,j} + N_{\rho,ri})(N_{\phi,ei,j} + N_{\phi,ri}) + (N_{\phi,ei,j} + N_{\phi,ri})^2 \leq (N_{0i})^2 \\ \text{visiems } i \in I, j \in J. \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.3. Haro ir Karmano principas nenusikraunančiai konstrukcijai

Disipacinių sistemų deformacijų būvis priklauso nuo apkrovimo istorijos  $\mathbf{F}(t)$ . Todėl neišvengiamai kyla klausimas, ar deformacijos ir atitinkantys jas poslinkiai, atsiradę per pirmuosius apkrovimo ciklus, neįgaus reikšmių, padarančių statybinių konstrukciją netinkamą normaliai eksportuoti. Taikant tampriai-plastinių sistemų analizės uždavinių formuluotėse matematinį programavimą, neišvengiamai susiduriama su matematinio programavimo griežtumo sąlyga:

$$\lambda_{kl,j} [S_{0k} - f_{kl,j}(\mathbf{S}_{ekl,j} + \mathbf{S}_{rkl})] = 0, \quad (3.13)$$

esant sąlygomis

$$S_{0k} - f_{kl,j}(\mathbf{S}_{ekl,j} + \mathbf{S}_{rkl}) \geq 0, \quad \lambda_{kl,j} \geq 0, \quad (3.14)$$

visiems  $k \in K$ ,  $l \in L$ ,  $j \in J$ . Priklausomumas (3.13) vadinamas matematinio programavimo griežtumo sąlyga. Kinematiškai galimi liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r$  yra tie, kurie tenkina geometrines lygtis (3.7). Šios sąlygos (3.13)–(3.14) reikalauja, jog plastinis deformavimasis būtų holonominis, kad jam galiotų Haro ir Karmano principas – skerspįvūio nusikrovimas negalimas (Zyczkowski 1981; Glowinski 2008). Remiantis šiuo principu galima nagrinėti ir vienkartės apkrovos atvejį. Verta pažymėti, kad prisitaikomumo procesas ne visada atitinka minėto Haro ir Karmano principo jau nulemtus reikalavimus. Kadangi konkreti apkrovimo istorija paprastai nėra pateikta, o žinomos tik apkrovų kitimo ribos  $\mathbf{F}_{inf}$ ,  $\mathbf{F}_{sup}$  ( $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{sup}$ ), savaime suprantama, jog imama taikyti ir liekamųjų poslinkių kitimo ribos  $\mathbf{u}_{r,inf} \leq \mathbf{u}_r(t) \leq \mathbf{u}_{r,sup}$ . Šiomis ribomis nustatyti reikia sukurti specialią metodiką. Bendruoju atveju liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r(t)$  priklauso nuo apkrovimo istorijos, galimo skerspįvūio nusikrovimo atveju (Giambanco *et al.* 1994; 2002; Capsoni *et al.* 1999). Liekamieji poslinkiai, kol bus pasiektas prisitaikomumo būvis, gali kisti nemonotoniškai ir būti ne vieninteliai, esant vieninteliui liekamųjų įrašų  $\mathbf{S}_r$  pasiskirstymui.

### 3.4. Ciklinės plastinės suirties uždavinio matematinis modelis

Optimizavimo uždaviniu vadinamas toks ekstremumo uždavinys, kuriame, žinant konstrukcijos konfigūraciją ir išorines jėgas, reikia rasti ribinės įrašos pasiskirstymą ir šį pasiskirstymą atitinkantį statiškai ir kinematiškai leistinų

įtempių ir deformacijų būvį (IDB). Taigi, optimizavimo uždavinys turi turėti optimalumo kriterijų-sąlyga, kuri išreikštų skaičiavimo tikslą. Tokia sąlyga paprastai vadinama konstrukcijos optimalumo kriterijumi.

Plastiškosios suirties optimizavimo uždavinyje siekiama nustatyti optimalų ribinės įrašos  $N_0$  pasiskirstymą veikiant išorinei apkrovai. Tamprios plastinės konstrukcijos optimizavimo uždavinio matematinio modelio apibūdinti taikomas toks energinis principas:

*iš visų statiškai leistinų liekamųjų įrašų  $S_r$  ciklinės plastiškosios suirties metu tikrosios yra tos, kurioms esant ciklo energijos sklaidos greitis yra minimalus.*

Matematinis modelis tokiam optimizavimo uždaviniui atrodo taip:

$$\text{rasti} \quad \mathbf{L}^T \mathbf{N}_0 \rightarrow \min, \quad (3.15)$$

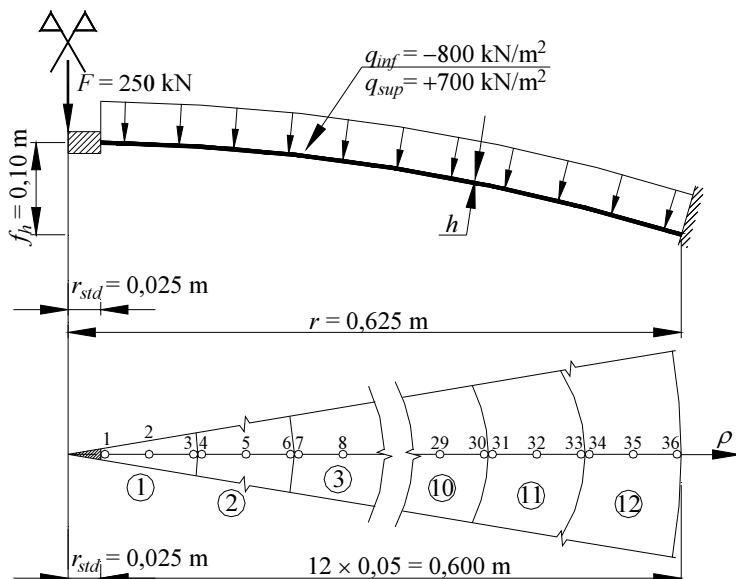
$$\text{esant sąlygomis} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (3.16)$$

$$\varphi_i \equiv \mathbf{N}_{0i}^2 - (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri})^T \Phi_i (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri}) \geq \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{N}_{0i} \geq \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

čia  $\mathbf{S}_{e,j}$  yra tamprus kevalo skaičiavimo įrašos, gaunamos pagal formulę (3.4). Šio netiesinio uždavinio sprendiniu yra vektoriai  $\mathbf{S}_r^*$  ir  $\mathbf{N}_0^*$  pasiskirstymas, atitinkantis optimalumo kriterijų (3.15) (Save *et al.* 1997; Tangaramvong *et al.* 2013). Žinant šį pasiskirstymą, galima nustatyti optimalų kiekvieno baigtinio elemento storį pagal šią išraišką  $\mathbf{h} = \mathbf{N}_0 / f_{yd}$ . Čia  $f_{yd} = f_y / \gamma_m = 235 / 1,1 = 213,6 \text{ MPa}$  yra skaičiuotinė plieno stiprumo riba. Suminės įrašos gaunamos  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_r + \mathbf{S}_e$ . Kai optimizavimo ribinės įrašos parametrų skaičius  $n_0 = 1$  (3.15–3.18) tampa vienparametrijų uždaviniu.

Nagrinėjamas ciklinės plastinės suirties uždavinio skaitinis pavyzdys. Standžiai įtvirtintas sferinis kevalas (3.2 pav.), veikiamas tolygiai paskirstytos kintamosios apkrovos  $q_{sup} = 700 \text{ kPa}$  ir  $q_{inf} = -800 \text{ kPa}$ , bei sutelktosios jėgos  $F = 250 \text{ kN}$  į standų diską, pavaizduotas 3.2 paveiksle. Sferinio kevalo pakylės aukštis  $f_h = 100 \text{ mm}$  ir jo pagrindo skersmuo  $L = 2r = 1,250 \text{ m}$ . Medžiagos savybės:  $\nu = 0,3$  ir  $E = 210 \text{ GPa}$ . Sferinis kevalas buvo suskaidytas į 12 vienodo pločio žiedinius elementus. Diskretinio modelio fragmentas parodytas 3.2 paveiksle. Iteraciniu skaičiavimu, pagal matematinį modelį (3.15)–(3.18) nustatytos ribinės ašinės jėgos  $\mathbf{N}_0$ , atitinkančios kevalo plastiškąją suirtį, pavaizduotos 3.1 lentelėje.



**3.2 pav.** Dvylikos baigtinių elementų sferinio kevalo diskretinis modelis

**Fig. 3.2.** A discrete model of a spherical shell of twelve finite elements

**3.1 lentelė.** Tikslų funkcijos reikšmių pasiskirstymas kevalo baigtiniuose elementuose ciklinio-plastiškojo suirimo metu

**Table 3.1.** The distribution of the objective function values of the shell finite element at cyclic-plastic collapse

PBE Nr.	$L_k \text{ m}^2$	$N_{0,k} \text{ kN/m}$	$h_k \text{ mm}$	$L_k \cdot N_{0,k} \text{ kNm}$
1	0,0157	8341,2	39,0	131,0
2	0,0314	5149,1	24,1	161,8
3	0,0471	3470,1	16,2	163,5
4	0,0628	2375,2	11,1	149,2
5	0,0785	1775,7	8,3	139,5
6	0,0942	1538,5	7,2	145,0
7	0,1100	1380,0	6,5	151,7
8	0,1257	1384,9	6,5	174,0
9	0,1414	1201,3	5,6	169,8
10	0,1571	961,9	4,5	151,1
11	0,1728	887,9	4,2	153,4
12	0,1885	942,7	4,4	177,7
				$L^T N_0 = 1867,8$



Turint ribines ašines jėgas  $\mathbf{N}_0$  ir kevalo storį  $h$  plastiškojo suirimo metu galima skaičiuoti analizės uždavinį, kad būtų nustatyti tikrieji liekamieji poslinkiai  $\mathbf{u}_r$  ir jų apatinės  $\mathbf{u}_{r,min}$  ir viršutinės  $\mathbf{u}_{r,max}$  kitimo ribos.

### 3.5. Prisitaikiusio kevalo įtempių ir deformacijų būvio analizės uždavinys

Analizės uždaviniu vadinamas toks uždavinys, kai konstrukcijos visi fizikiniai parametrai ir išorinė apkrova iš anksto yra žinoma, o reikia nustatyti ĮDB būvį sistemai dar visiškai nesuirus (Atkočiūnas *et al.* 2010). Taigi ekstreminis energinis papildomos deformavimo energijos principas leidžia nustatyti tikrąjį liekamųjų įrąžų vektorių  $\mathbf{S}_r^*$ :

*iš visų statiškai liekamųjų įrąžų vektorių  $\mathbf{S}_r$  tikrasis yra tas, kuriam esant konstrukcijos prisitaikomumo būvio papildoma energija yra minimali. Šį principą atitinka toks ekstreminis uždavinys:*

$$\text{rasti} \quad \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T \mathbf{D} \mathbf{S}_r \rightarrow \min, \quad (3.19)$$

$$\text{esant sąlygomis} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (3.20)$$

$$\varphi_i \equiv \mathbf{N}_{0i}^2 - (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri})^T \Phi_i (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri}) \geq \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

čia nežinomieji tik ribinės įrąžos  $\mathbf{S}_r^*$  dydis ir jos pasiskirstymas.

Kinematinė analizės uždavinio formuluotė gaunama pasitelkus matematinio programavimo dualumo teoriją:

$$\text{rasti} \quad \frac{1}{2} \mathbf{S}_r^T \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \Theta_p \mathbf{S}_r + \sum_j \lambda_j^T \varphi_j \rightarrow \min, \quad (3.22)$$

$$\text{esant sąlygoms} \quad \mathbf{D} \mathbf{S}_r - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r + \Theta_p = \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

$$\lambda_j \geq \mathbf{0}, j \in J. \quad (3.24)$$

Čia  $\Theta_p = \sum_j [\nabla \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri})] \lambda_j$  – plastinių deformacijų vektorius. Šio

uždavinio nežinomieji yra  $\mathbf{S}_r^*$ ,  $\mathbf{u}_r^*$  ir  $\lambda_j^*$ . Statinės formuluotės (3.19)–(3.21) ir dualaus (3.22)–(3.24) uždavinio nežinomas  $\mathbf{S}_r^*$  visiškai sutampa. Uždavinys (3.22)–(3.24) siejamas su pilnutinės energijos minimumo principu:

iš visų kinematiškai leistinų liekamųjų poslinkių vektorių  $\mathbf{u}_r$  tikrasis yra tas, kuriam esant konstrukcijos prisitaikomumo būvio pilnutinė potencinė energija yra minimali.

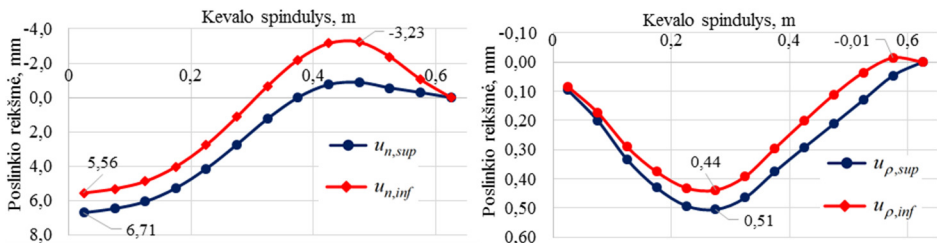
Tačiau verta paminėti, kad matematinis modelis (3.22)–(3.24) turi trūkumą, analizuojant prisitaikusias konstrukcijas, nes tiesiogiai neįvertina skerspjuvių nusikrovimo. Kinematinės formuluotės uždavinio (3.22)–(3.24) optimalų skerspjuvio nusikrovimą sprendiniui lemia matematinio programavimo griežtumo sąlygos:

$$\lambda_j^T \left( \mathbf{N}_{0i}^2 - (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri}^*)^T \Phi_i (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri}^*) \right) = \mathbf{0}, \lambda_j^* \geq \mathbf{0} \text{ visiems } j \in J. \quad (3.25)$$

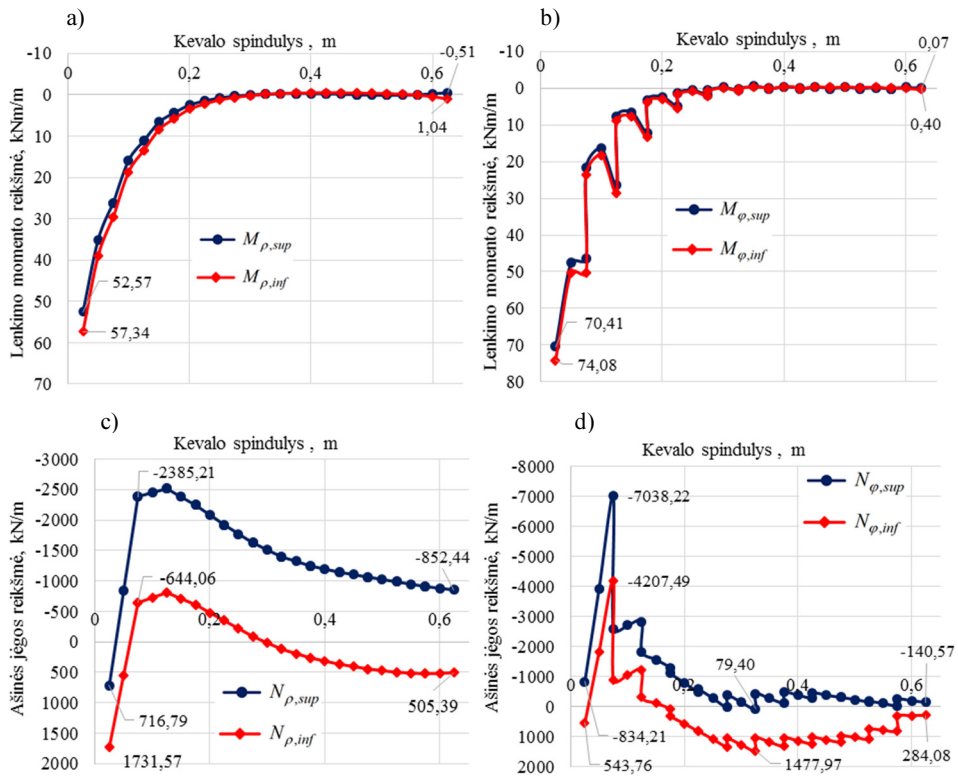
Čia  $\mathbf{S}_{ej}$  yra tamprių įrašų hodografo viršūnė  $j \in J$ , kuriai takumo sąlygos tenkinamos kaip lygybės (dažnai vektoriai  $\mathbf{S}_{ej}$  šioms viršūnėms žymimi  $\mathbf{S}_{ej}^*$ ).

Analizės uždavinio kinematinė formuluotė apjungia savyje Kuno ir Takerio sąlygas (Nguyen-Dang *et al.* 1990; Atkočiūnas 2011). Matematinis modelis (3.22)–(3.24) tinka holonominės elgsenos konstrukcijai, šis tvirtinimas pagrįstas matematinio programavimo griežtumo sąlyga (3.25): į galimą konstrukcijos skerspjuvių nusikrovimą prisitaikymo proceso metu neatsižvelgiama. Būtent šio fakto pamiršti negalima, sudarant prisitaikusias konstrukcijas itin tikslus optimizavimo uždavinių matematinius modelius.

Poslinkių viršutinių ir apatinių ribų nustatymas  
Nagrinėjamas kevalas, kuris pavaizduotas 3.2 paveiksle. Naudojamos ribinės įrašos  $\mathbf{N}_0$  ir kevalo storį  $h$ , gautų pagal (3.15)–(3.18) uždavinio matematinį modelį. Sprendžiamas analizės uždavinys (matematinis modelis (3.22)–(3.24)) prieš pat kevalo suirimą. Norint gauti įrašų ir deformacijos būvį prieš pat suirimą mažiname išorinę apkrovą 0,5%. Skaičiavimo rezultatai, kai skaičiuojamas tampaipriai-plastinis sferinis kevalas pateikti 3.3 ir 3.4 paveiksle.



3.3 pav. Kevalo poslinkiai prieš pat ciklinį-plastinį suirimą  
Fig. 3.3. Displacement of shell prior to cycle-plastic collapse



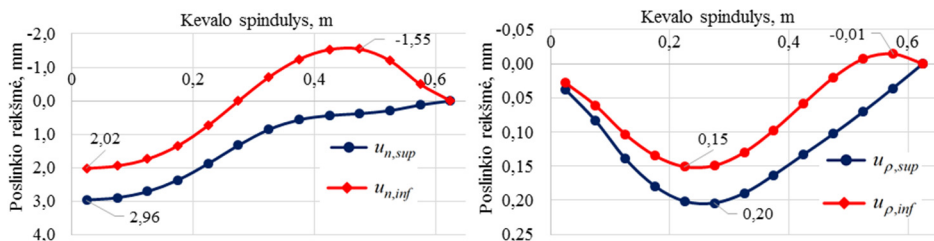
**3.4 pav.** Kevalo įrašos prieš pat ciklinį-plastinį suirimą: a) lenkimo momentai  $M_\rho$ ;

b) lenkimo momentai  $M_\phi$ ; c) ašinės jėgos  $N_\rho$ ; d) ašinės jėgos  $N_\phi$

**Fig. 3.4.** Internal forces of shell prior to cycle-plastic collapse: a) bending moments  $M_\rho$ ;

b) bending moments  $M_\phi$ ; c) axial forces  $N_\rho$ ; d) axial forces  $N_\phi$

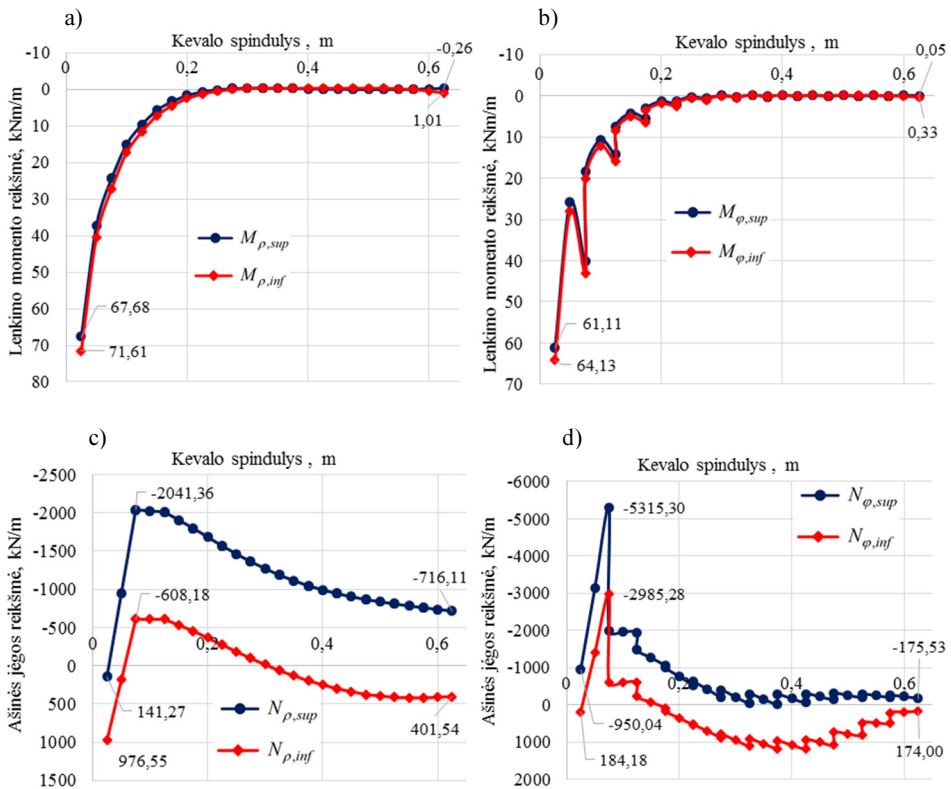
Taip pat ieškome įrašų ir poslinkių pasiskirstymas, kai dar visas sferinis kevalas dirba tik tampriai (3.5 ir 3.6 pav.).



**3.5 pav.** Poslinkiai, kai kevalas dirba tik tampriai

**Fig. 3.5.** Displacement, when shell works only elastic

Tam ieškoma didžiausia apkrova, prie kurios neatsiranda plastinių deformacijų. Mano nagrinėjamu atveju, randamas daugiklis  $F_{daug} = 0,819$ , prie kurio sferinis kevalas dirbs tik tampriai. Skaičiavimo rezultatai, kai skaičiuojamas tamprus sferinis kevalas pateikiami 3.5 ir 3.6 paveiksluose.



**3.6 pav.** Įrašos ir poslinkiai, kai kevalas dirba tik tampriai: a) lenkimo momentai  $M_{\rho}$ ;

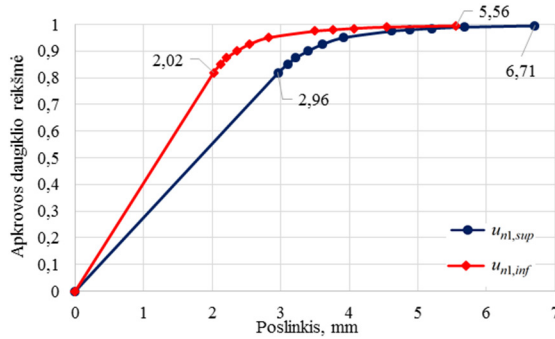
b) lenkimo momentai  $M_{\phi}$ ; c) ašinės jėgos  $N_{\rho}$ ; d) ašinės jėgos  $N_{\phi}$

**Fig. 3.6.** Internal forces and displacement, when shell works only elastic:

a) bending moments  $M_{\rho}$ ; b) bending moments  $M_{\phi}$ ; c) axial forces  $N_{\rho}$ ; d) axial forces  $N_{\phi}$

Iš 3.3–3.6 paveikslų galime nustatyti viršutines ar apatines poslinkių ribas. Detalesnė informacija apie priklausomybę tarp išorinės apkrovos ir pirmojo elemento pirmojo mazgo (3.3 pav.) poslinkio normaline kryptimi, įvertinant tamprų ir tampriai-plastinį kevalo darbą, pavaizduota 3.5 paveiksle. Iš 3.7 paveikslo matyti, jog kevalo standumas mažėja, didėjant apkrovos daugikliui. Kevalo pirmojo mazgo poslinkis (3.3 pav.) normalės kryptimi ( $F_{daug} = 0,995$ )  $u_{n1,sup} = 6,71$  mm ir  $u_{n1,inf} = 5,56$  mm prieš pat ciklinį-plastinį suirimą ir

atitinkamai, kai kevalas dirba tik tamptriai ( $F_{daug} = 0,819$ )  $u_{nl,sup} = 2,96$  mm ir  $u_{nl,inf} = 2,02$  mm.



3.7 pav. Išorinės apkrovos ir poslinkių priklausomybė

Fig. 3.7. The dependence of external load and displacements

Įtempių ir deformacijų analizės uždaviniai yra labai svarbūs optimizuojant sferinius kevalus. Jie yra pagrindu sudarant sferinių kevalų optimizavimo uždavinių matematinius modelius. Analizės uždavinių rezultatai leidžia įvertinti kevalo darbo ypatumus įvairiuose apkrovimo etapuose ir užtikrinti eksploatacijos reikalavimus (Karkauskas *et al.* 2011; Popov *et al.* 2013).

### 3.6. Prisiaikiusio sferinio kevalo optimizavimo uždavinys ribojant poslinkį

ĮDB ir optimalus ribinių įrašų  $S_0$  pasiskirstymas nustatomas žinant konstrukcijos geometrija, apkrovą ir jos tipą. Tegul medžiagos tūrio, tenkančio vidurinio konstrukcijos paviršiaus ploto vienetui kaina bus proporcinga ribinei įrašai  $N_0$  ir apskaičiuojama pagal formulę:

$$\min \omega(N_0) = \sum_{k=1}^s \varphi_k A_k N_{0,k} . \quad (3.26)$$

Čia  $\varphi_k$  – ribinės įrašos skaliarinė funkcija,  $A_k$  – kevalo viduriniojo paviršiaus plotas k-ojo elemento, proporcingas projektiniam kevalo plotui  $L = (L_1, L_2, \dots, L_s)^T$ . Skaičiuojant vienparametrius kevalus imame, kad  $\varphi = const$ , tai koeficientas  $\varphi = 1$ . Įvertinat optimalumo kriterijų išraišką (3.26) galime užrašyti:

$$\min \omega(\mathbf{S}_0) = \min \mathbf{L}^T \mathbf{N}_0. \quad (3.27)$$

Sferinis kevalas turi tenkinti stiprumo sąlygas ir būti saugi plastiškosios suirties metu. Tačiau verta paminėti, kad liekamieji poslinkiai gali atsirasti dėl atsiradusių plastinių deformacijų, net ir tada kai išorinės apkrovos poveikis yra nulinis. Liekamieji poslinkiai gali būti dideli, todėl verta patikrinti suminio poslinkio reikšmę su ribiniu poslinkiu (Maier *et al.* 1996; Tin-Loi 2000). Todėl būtina nustatyti ne tik įtempių būvį, bet ir deformacijas sferinio kevalo prisitaikomumo sąlygomis.

Prisitaikiusio sferinio kevalo ribinių įrašų pasiskirstymo uždavinio matematinis modelis yra:

$$\text{rasti} \quad \mathbf{L}^T \mathbf{N}_0 \rightarrow \min, \quad (3.28)$$

$$\text{esant sąlygomis} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (3.29)$$

$$\varphi \equiv (\mathbf{N}_0)^2 - (\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{S}_r)^T \Phi(\mathbf{N}_0) (\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{S}_r) \geq \mathbf{0}, \quad (3.30)$$

$$\lambda_j^T \left[ (\mathbf{N}_0)^2 - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{S}_r) \right] = 0, \lambda_j \geq \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{N}_0) \mathbf{S}_r + \sum_j \left[ \nabla^T \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{S}_r) \right] \lambda_j - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (3.32)$$

$$\mathbf{N}_0 \geq \mathbf{N}_{0,\max}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{e,\min}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{\max} \geq \mathbf{u}_{e,\max}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{u}_r, \text{ visiems } j \in J. \quad (3.34)$$

### 3.6.1. Prisitaikiusio sferinio kevalo optimizavimo uždavinio ribojant poslinkius skaitinis pavyzdys

Sferinis kevalas yra skirstomas į dvylika vienodo pločio žiedinius elementus. Tokio diskretinio modelio fragmentas pavaizduotas 3.2 paveiksle. Matematinis modelis (3.28)–(3.34) sprendžiamas iteraciniu būdu (Casciaro *et al.* 2002; Giambanco *et al.* 2004; Palizzolo *et al.* 2014). Apatinės ribinės ašinės jėgos reikšmės imamos pagal uždavinio (3.15)–(3.18) optimalias parametro reikšmes. Pasirikto poslinkio ribojimas turi tenkinti nelygybę  $\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{e,j} + \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}_{\max}$ . Poslinkių minimalios  $\mathbf{u}_{\min}$  ir maksimalios  $\mathbf{u}_{\max}$  reikšmės imamos pagal 3.5 poskyrio gautas reikšmes ir jas išrenkant atitinkamai, kai konstrukcija dirba tik tampriai (3.5 pav.) ir prieš pat ciklinį-plastinį suirimą (3.3 pav.).

$$u_{n1,\min} = \min(u_{n1,\sup}^{\min}, u_{n1,\inf}^{\min}) = 2,02 \text{ mm},$$

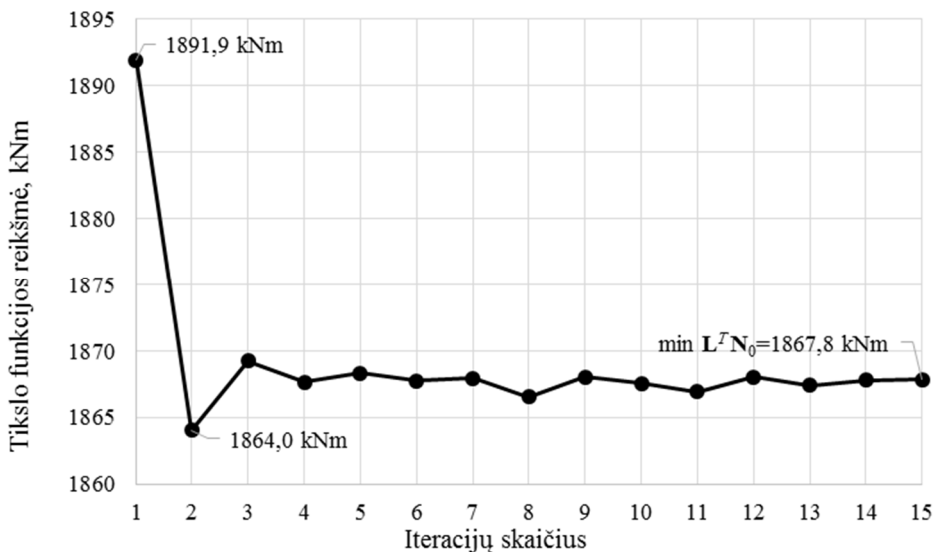
$$u_{n1,\max} = \max(u_{n1,\sup}^{\max}, u_{n1,\inf}^{\max}) = 6,71 \text{ mm}.$$

Pagal gautas uždavinio poslinkių ribas, matome kad poslinkis bus vienos krypties. Tokiu atveju matematinio modelio (3.28)–(3.34) standumo sąlyga (3.34) tampa paprastesne:

$$\mathbf{u}_{e,j}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}, \text{ visiems } j \in J. \quad (3.35)$$

Poslinkio ribojimo reikšmė turi būti parinkta tokia, kad optimizuojant kevalą, jame pradėtų vystytis plastinės deformacijos. Užsiduodame pirmojo baigtinio elemento pirmojo mazgo poslinkio normalės kryptimi ribojimo reikšmę  $u_{n1} = 3,5 \text{ mm}$ .

Uždavinių (3.28)–(3.33) ir (3.35) tikslo funkcijos iteracinio skaičiavimo metu konvergencija pavaizduota 3.8 paveiksle, o optimalus kevalo sprendinys ir ribinės ašinės jėgos  $\mathbf{N}_0$  pasiskirstymas pavaizduotas atitinkamai 3.2 lentelėje ir 3.9 paveiksle.



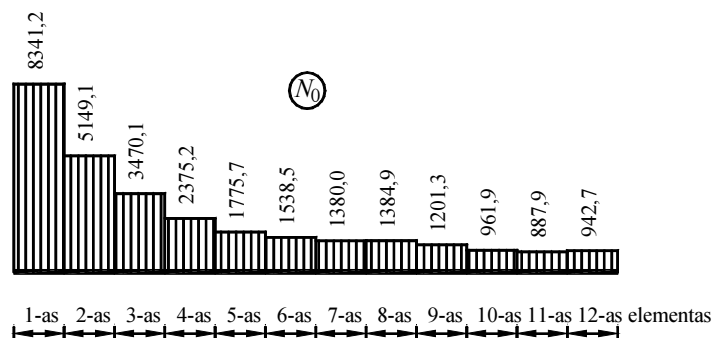
**3.8 pav.** Tikslo funkcijos konvergencija, kai ribojamas poslinkis

**Fig. 3.8.** The convergence of the objective function when the displacement is restricted

**3.2 lentelė.** Optimalaus sferinio kevalo ribinės ašinės jėgos  $N_0$  ir storiai  $h$

**Table 3.2.** Limit axial forces  $N_0$  and thickness  $h$  of the optimal spherical shell

Iter	$N_{0,1}$	$N_{0,2}$	$N_{0,3}$	$N_{0,4}$	$N_{0,5}$	$N_{0,6}$	$N_{0,7}$	$N_{0,8}$	$N_{0,9}$	$N_{0,10}$	$N_{0,11}$	$N_{0,12}$	$L^T N_0$
1	9453,0	5170,8	3459,6	2373,1	1787,4	1547,2	1381,4	1337,1	1201,6	947,1	884,1	1015,2	1891,9
2	8229,3	5176,1	3478,0	2381,0	1776,7	1533,1	1375,9	1319,7	1197,0	967,7	886,9	971,1	1864,0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
13	8328,9	5149,1	3470,1	2375,3	1775,7	1538,1	1380,0	1381,6	1203,1	961,9	887,9	942,7	1867,4
14	8339,7	5148,4	3469,6	2374,8	1775,5	1536,0	1380,0	1392,5	1196,7	962,1	887,7	942,7	1867,8
15	8341,2	5149,1	3470,1	2375,2	1775,7	1538,5	1380,0	1384,9	1201,3	961,9	887,9	942,7	1867,8
atitinkamai kevalo storiai $h$ , mm													
	39,0	24,1	16,2	11,1	8,3	7,2	6,5	6,5	5,6	4,5	4,2	4,4	

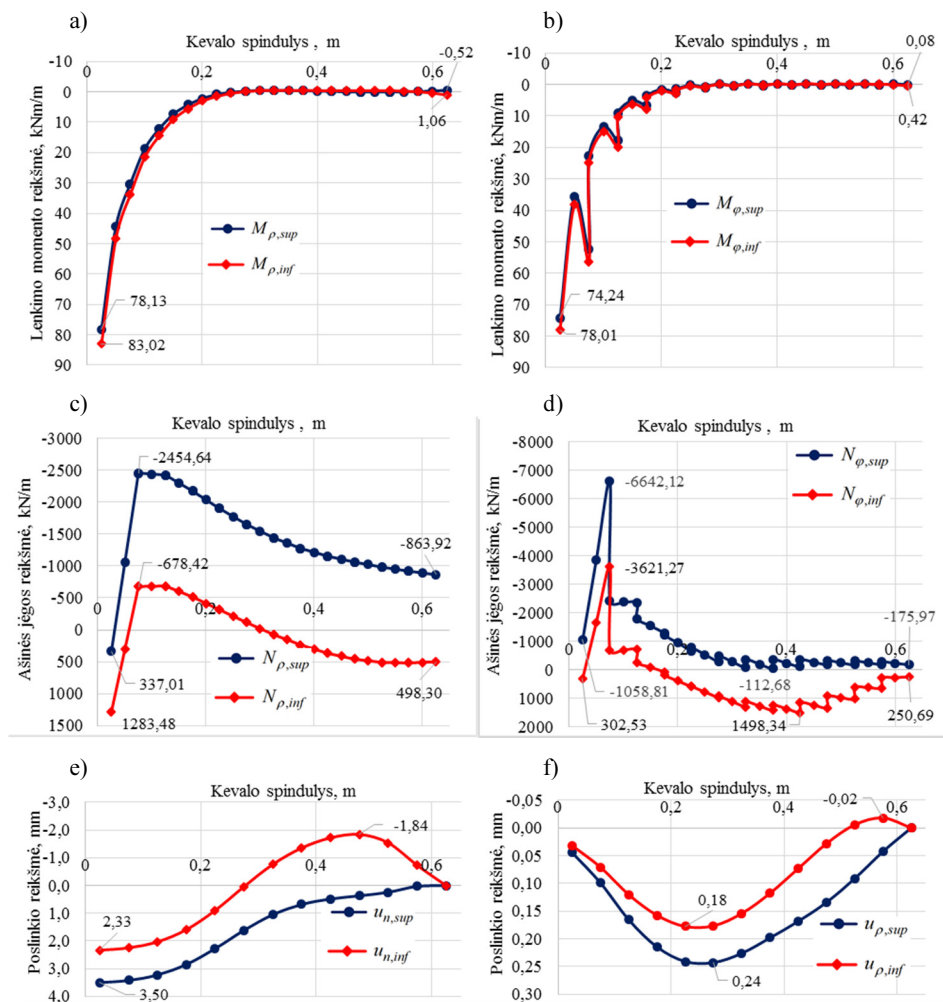


**3.9 pav.** Optimalaus sferinio kevalo ribinių ašinių jėgų  $N_0$  (kN/m) pasiskirstymas

**Fig. 3.9.** The distribution of limit axial forces  $N_0$  (kN/m) of the optimal spherical shell



Sprendžiant optimizavimo uždavinį (3.28)–(3.33), (3.35) standžiose konstrukcijos srityse bendru atveju gali būti gaunamas ne vienintelis liekamųjų įrašų  $S_r$  pasiskirstymas. Reikia nustatyti ar uždavinio įrašų ir poslinkių pasiskirstymas yra vienintelis.



**3.10 pav.** Optimalaus kevalo tikrosios įrašos ir poslinkiai: a) lenkimo momentai  $M_{\rho}$ ; b) lenkimo momentai  $M_{\phi}$ ; c) ašinės jėgos  $N_{\rho}$ ; d) ašinės jėgos  $N_{\phi}$ ; e) poslinkiai  $u_n$ ; f) poslinkiai  $u_{\rho}$

**Fig. 3.10.** The real internal forces and displacements of the optimal shell  
a) bending moments  $M_{\rho}$ ; b) bending moments  $M_{\phi}$ ; c) axial forces  $N_{\rho}$ ; d) axial forces  $N_{\phi}$ ;  
e) displacements  $u_n$ ; f) displacements  $u_{\rho}$

Išsprendus analizės uždavinį (3.22)–(3.24), (3.25) nustatyta, kad liekamųjų įrašų  $S_r$  ir poslinkių  $u_r$  reikšmės yra tikrosios. 3.10 paveiksle pateikiamos tikrosios įrašų ir poslinkių reikšmės.

### 3.6.2. Prisitaikiusio sferinio kevalo skaitinys pavyzdys esant pastoviam skerspjūviui

Šiame skyriuje skaičiuojamas sferinis kevalas, kuris pavaizduotas 3.2 paveiksle, kai jo diskretiniame modelyje buvo priimta sąlyga  $h = \text{const}$  visiems elementams. Standumo ribojimas ( $u_{n1} = 3,5 \text{ mm}$ ) buvo priimtas toks pat kaip ir uždavinyje (3.28)–(3.33), (3.35). Kadangi sprendžiamas vienparametrinis uždavinys, tai matematinis modelis tampa paprastesniu ir jis užrašomas taip:

$$\text{rasti} \quad N_0 \rightarrow \min, \quad (3.36)$$

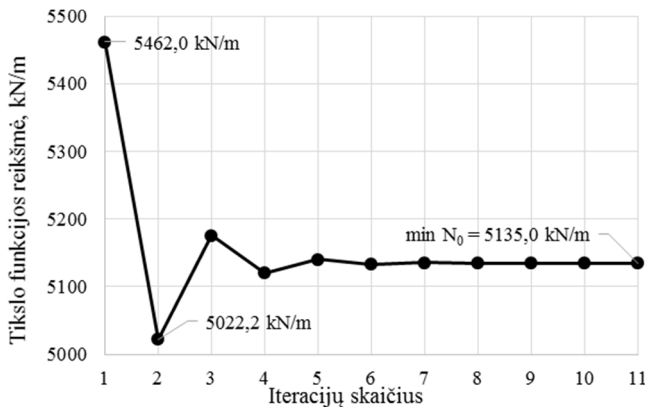
$$\text{esant sąlygomis} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (3.37)$$

$$\varphi \equiv (N_0)^2 - (\mathbf{S}_{e,j}(N_0) + \mathbf{S}_r)^T \Phi(N_0) (\mathbf{S}_{e,j}(N_0) + \mathbf{S}_r) \geq 0, \quad (3.38)$$

$$\lambda_j^T \left[ (N_0)^2 - f_j(\mathbf{S}_{e,j}(N_0) + \mathbf{S}_r) \right] = 0, \lambda_j \geq 0, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{D}(N_0) \mathbf{S}_r + \sum_j \left[ \nabla^T f_j(\mathbf{S}_{e,j}(N_0) + \mathbf{S}_r) \right] \lambda_j - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

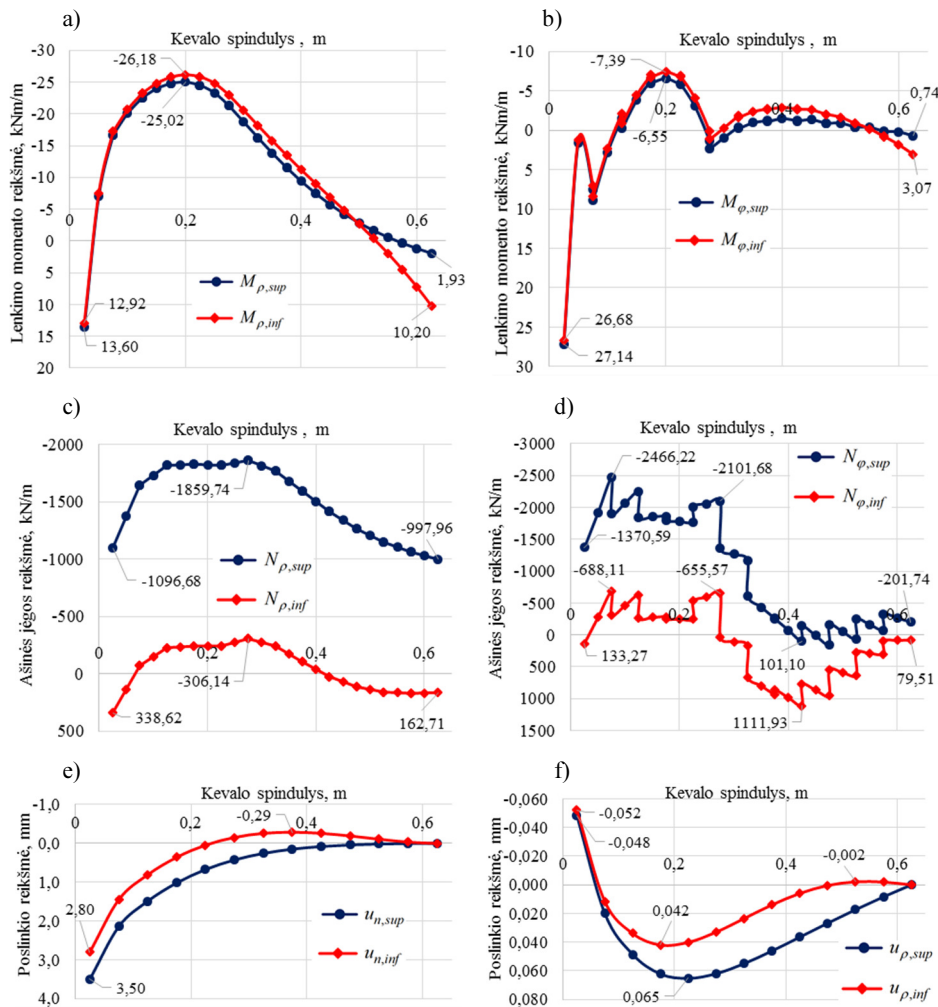
$$\mathbf{u}_{e,j}(N_0) + \mathbf{u}_r \leq \mathbf{u}, \text{ visiems } j \in J. \quad (3.41)$$



3.11 pav. Vienparametrio uždavinio tikslo funkcijos konvergencija, kai poslinkiai yra ribojami

Fig. 3.11. The convergence of the objective function of single-parameter task when the displacement is restricted

Buvo nustatytas optimalus kevalo storis  $h = 24,0$  mm ir atitinkamai ribinė ašinė jėga  $N_0 = 5135,0$  kN/m, įrašų ir poslinkių pasiskirstymas (3.12 pav.). Tikslų funkcijų konvergencijos grafikas pavaizduotas 3.11 paveiksle.



**3.12 pav.** Vienparametrio kevalo tikrosios įrašų ir poslinkiai: a) lenkimo momentai  $M_{\rho}$ ; b) lenkimo momentai  $M_{\phi}$ ; c) ašinės jėgos  $N_{\rho}$ ; d) ašinės jėgos  $N_{\phi}$ ; e) poslinkiai  $u_n$ ; f) poslinkiai  $u_{\rho}$

**Fig. 3.12.** The real internal forces and displacements of the single-parameter shell:

- a) bending moments  $M_{\rho}$ ; b) bending moments  $M_{\phi}$ ; c) axial forces  $N_{\rho}$ ; d) axial forces  $N_{\phi}$ ; e) displacements  $u_n$ ; f) displacements  $u_{\rho}$

Buvo atliktas rezultatų palyginimas ir nustatyta, jog minimali tikslo funkcijos reikšmė  $\mathbf{L}^T \mathbf{N}_0 = 1867,8 \text{ kNm}$ , naudojant (3.28)–(3.33), (3.35) matematinį modelį, yra 3,37 karto mažesnė nei skaičiuojant (3.36)–(3.41) matematinį modelį, kurio reikšmė  $L_S N_0 = 1,225 \cdot 5135,0 = 6291,5 \text{ kNm}$ , čia  $L_S$  – visų 12 elementų plotų suma. Iš 3.10 ir 3.12 paveikslų matyti, kad įrašos vienparametrinio uždavinio yra kur kas mažesnės nei (3.28)–(3.33), (3.35) uždavinio matematinio modelio skaičiavimo rezultatus.

### 3.7. Trečiojo skyriaus išvados

1. Skaitiniai prisitaikančio kevalo optimizavimo uždavinių, esant kartotinei-kintamajai apkrovai, sprendimo rezultatai parodo disertacijoje sukurtos metodikos gyvybingumą.
2. Racionalu naudoti netiesinę takumo sąlygą. Pradiniuose optimizavimo uždavinio sprendimo etapuose galima taikyti ištiesintą takumo sąlygą, tačiau baigiamajame optimizavimo etape privalu įjungti segmentą su netiesine takumo sąlyga.
3. Optimalus sprendinys buvo gautas panaudojus net tik stiprumo sąlygas (netiesinės Mizeso plastiškumo kriterijaus sąlygos), bet buvo taikomi ir standumo apribojimai. Matematinuose modeliuose gali būti panaudotos Kuno ir Takerio sąlygos.
4. Skaitiniai eksperimentai parodė, jog žiediniai pusiausviri baigtiniai elementai tinka tampriai-plastinių lėkštų sferinių kevalų prisitaikomumo (kartotinė-kintamoji apkrova) analizei.
5. Programinis paketas *MATLAB* (paprogramis *fmincon*) gali būti panaudojamas netiesiniams prisitaikiusių kevalų optimizavimo uždaviniams spręsti. Pasiūlyti PBE užtikrina greitą sprendinio konvergavimą.
6. Atliktas disertacijoje gautų rezultatų palyginimas, kai kevalo storis yra pastovus visuose baigtiniuose elementuose ir kai baigtinių elementų storiai buvo skirtingi kiekviename baigtiniame elemente. Gauti rezultatai, atitinkamai  $L_S N_0 = 6291,5 \text{ kNm}$  ir  $\mathbf{L}^T \mathbf{N}_0 = 1867,8 \text{ kNm}$ .

---

## Bendrosios išvados

1. Dažnai statybinės konstrukcijos patiria poveikius su aiškiais jų cikliško kitimo laike  $t$ , požymiais (veikia pasikartojanti apkrova), todėl projektuojant optimalias konstrukcijas (disertacijoje nagrinėjamu atveju – lėkštus sferinius kevalus), būtina įvertinti saugos prisitaikomumo būvį.
2. Disertacijoje pasiūlytas pusiausvirasis baigtinis elementas, skirtas tiek tamprių, tiek tampriai-plastinių lėkštų, simetriškai apkrautų sferinių kevalų analizei. Elemento diferencialinės statikos lygtys, nusakančios jo vidinių ir išorinių jėgų pusiausvyrą, taikant Bubnov-Galiorkino metodą pakeičiamos algebrinėmis lygtimis.
3. Įrodyta, jog pateiktos PBE priklausomybės leidžia lygtis, aprašančias diskretinio modelio mazgų poslinkius, sudaryti tiesiogiai – panaudojant standumo matricas (analogiškai poslinkinių elementų metodui).
4. Skaičiuojamieji tyrimai, atlikti disertacijoje, įrodė, jog naudojant įvairaus tankio elementų tinklą sukurtojo elemento tikslumas yra didelis, lyginant su Hintono skelbtais rezultatais. Tai ypatingai svarbu atliekant tampriai-plastišką kevalų analizę ir sprendžiant kevalų optimizavimo netiesinio programavimo uždavinius.
5. Atlikta įtempių ir deformacijos būvių rezultatų analizė. Vienparametrinio optimizavimo uždavinio atveju tikslo funkcijos reikšmė – 6291,5 kNm. Optimizavimo uždavinio atveju – 1867,8 kNm (3,37 karto sunaudojama

mažiau medžiagų). Vienparametrinio uždavinio įrašos (pagal didžiausias reikšmes) yra atitinkamai 2–6 kartus mažesnės, negu įrašos, gautos skirtingų elementų storių atveju.

6. Skaitiniai eksperimentai atskleidė galimybę sudarytus optimizavimo uždavinių matematinius modelius taikyti plieninių konstrukcijų patikrai, esant cikliniam plastiniam suirimui.

---

## Literatūra ir šaltiniai

Abdel-Karim, M. 2005. Shakedown of complex structures according to various hardening rules. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 82: 427–458.

Adams, J. C.; Brainerd, W. S.; Hendrickson, R. A.; Maine, R. E.; Martin, J. T.; Smith, B. T. 2009. *The Fortran 2003 Handbook*. 1st ed. Springer. 712 p.

Agoshkov, V. I.; Dubovsky, P. B.; Shutaiyev, V. P. 2006. *Methods for Solving Mathematical Physics Problems*, 320 p.

Alyavdin, P. V.; Bryś, G.; Werner, F. 2002. Theoretical and experimental investigations on thin-walled steel beams subjected to low cyclic loadings, in *Proc. of Intern. Symposium on Light-weight Structures in Civil Engineering*. Warsaw, 657–660.

Alyavdin, P. V. 2005. *Predelnyy analiz konstruktiv pri povtornykh nagruzheniakh* [Limit analysis of structures under variable loads]. Minsk: UP Technoprint. 282 p. (in Russian).

Atkočiūnas, J. 2011. *Optimal shakedown design of elastic-plastic structures*, Vilnius: VGTU Publishing House TECHNIKA.

Atkočiūnas, J.; Borkowski, A.; König, J. A. 1981. Improved bounds for displacements at shakedown, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 28(3): 365–376.

Atkočiūnas, J.; Jarmolajeva, E.; Merkevičiūtė, D. 2004. Optimal shakedown loading for circular plates, *Struct Multidisc Optim* 27:178–188. doi:10.1007/s00158-003-0308-5.

Atkočiūnas, J.; Karkauskas, R. 2010. *Tampriųjų plastinių strypinių konstrukcijų optimizavimas*, Vilnius: Technika. 376 p.

Atkočiūnas, J.; Merkevičiūtė, D.; Venskų, A. 2008. Optimal shakedown design of bar systems: Strength, stiffness and stability constraints, *Computers & Structures* 86 (17–18):1757–1768. doi:10.1016/j.compstruc.2008.01.008.

Atkočiūnas, J.; Nagevičius, J. 2004. *Tamprumo teorijos pagrindai*. Vilnius: Technika. 528 p.

Atkočiūnas, J.; Venskų, A. 2011. Optimal shakedown design of frames under stability conditions according to standards, *Computers and Structures* 89:435–443. doi:10.1016/j.compstruc.2010.11.014.

Bazaraa, M. S.; Sherali, H. D.; Shetty, C. M. 2006. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons Ltd., New York. 872 p.

Belevičius, R.; Kutas, R. 2000. *Fortranas*. Lietuvos mokslų akademijos leidykla. 238 p.

Belytschko, T. 1972. Plane stress shakedown analysis by finite elements, *International Journal of Mechanical Sciences*, 16:619–625.

Belytschko, T.; Liu W. K.; Moran, B. 2000. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, England. 667 p.

Belytschko, T.; Liu W. K.; Moran, B.; Elkhodary K. I. 2013. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, 2<sup>nd</sup> ed. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, England. 832 p.

Bhatti, M., A. 2005. *Fundamental finiteelement analysis and applications: with Mathematica and Matlab computations*, John Wiley & Sons, Ltd., Hoboken, NJ. 718 p.

Bleich H. 1932. *Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes*. Bauingenieur 13:261–267.

Calladine, C.; R. 1989. *Theory of shell structures*. Cambridge University Press. 788 p.

Capsoni, A.; Carradi, L. 1999. Limit Analysis of plates – a finite element formulation. *Structural engineering and Mechanics* 8:325–341.

Casciaro, R.; Garcea, G. 2002. An iterative method for shakedown analysis. *Comput Methods Appl Mech Eng* 191:5761–5792.

Celia, M. A.; Gray, W. G. 1992. *Numerical Methods for Differential Equations: Fundamental Concepts for Scientific and Engineering Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Chakrabarty, J. 2006. *Theory of Plasticity*, Butterworth-Heinemann. 896 p.

Chapelle, D.; Bathe K. J. 2011. *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals* (Computational Fluid and Solid Mechanics). Publisher:Springer. 417 p.



- Čyras, A. 1983. *Mathematical models for the analysis and optimization of elastoplastic structures*, Chichester: Ellis Horwood Limited. 121 p.
- Čyras, A.; Borkowski, A.; Karkauskas, R. 2004. *Theory and Methods of Optimization of Rigid-Plastic Systems*, Vilnius: Technika. 354 p.
- Čyras, A.; Kalanta, S. 1974. Optimal design of cylindrical shells by the finite element technique, *Mechanics Research Communication* 1(3):125–130.
- Clough, R. W. 1960. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. *Proceedings, American Society of Civil Engineers, Second Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh.
- Corradi, L.; Zavelani A. 1974. A linear programming approach to shakedown analysis of structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3:37–53.
- Desai, Y. M.; Eldho, T.I.; Shah, A. H. 2011. *Finite element method with applications in engineering*, New Delhi: Dorling Kindersley, 471 p.
- Dube, G. P. Joshi S., Dumir P.C. 2001. Nonlinear analysis of thick shallow spherical and conical orthotropic caps using Galerkin's method, *Applied Mathematical Modeling* 25:755–773. [http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X\(01\)00012-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0307-904X(01)00012-9).
- Eraslan, A.N. 2002. Von mises yield criterion and nonlinearly hardening variable thickness rotating annular disks with rigid inclusion, *Mechanics Research Communications* 29:339–350. [http://dx.doi.org/10.1016/S0093-6413\(02\)00282-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0093-6413(02)00282-3).
- Ferreira, A. J. M. 2008. *MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures*, Springer Science & Business Media. 246 p.
- Fletcher, C. A. J. 1984. *Computational Galerkin Methods*, Springer, 72–85.
- Fraeijs de Veubeke. 2001. Displacement and equilibrium models in the finite element method, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 52:287–342.
- Galerkin, B. G. 1915. *Series Solution of Some Problems of Elastic Equilibrium of Rods and Plates* [in Russian]. *Vestn. Inzh. Tekh.* 19.
- Gallagher, R. H. 1969. Analysis of Plate and Shell Structures. *Proceedings, Symposium on the Application of Finite Element Methods in Civil Engineering*, Vanderbilt University, Nashville, 155–205.
- Gallagher, R. H. 1975. *Finite element analysis: Fundamentals*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Caffarelli, A. 2002. An Optimal Plastic Shakedown Design, *In Proceedings of the 6th International Conference on Computational Structures Technology*, Bittnar Z. Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, paper 10.
- Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Caffarelli, A. 2004. Computational procedures for plastic shakedown design of structures, *Struct Multidisc Optim* 28:317–329. doi.10.1007/s00158-004-0402-3.

Giambanco, F.; Palizzolo, L.; Polizzotto, C. 1994. Optimal shakedown design of beam structures, *Structural Optimization* 8:156–167.

Glowinski, R. 2008. *Lectures on Numerical Methods for Non-Linear Variational Problems*, Springer Science & Business Media, 496 p.

Gokhfeld, D. A.; Cherniavsky, O. F. 1980. *Limit analysis of structures at thermal cycling*, The Netherlands, Rockville, Md.: Sijthoff & Noordhoff. 568 p.

Gribniak, V.; Kaklauskas, G.; Idnurm, S.; Bačinskas, D. 2010. Finite element mesh size effect on deformation predictions of reinforced concrete bridge girder, *The Baltic journal of road and bridge engineering* 5(1) p. 19–27. doi: 10.3846/bjrbe.2010.03.

Grüning, M. 1926. *Die Tragfähigkeit statisch unbestimmter Tragwerke aus Stahl bei bleibig häufig wiederholter Belastung*, Springer-Verlag, Berlin.

Hein, H.; J. Lellep. 1999. Optimization of shallow shells with different yield stresses in tension and compression, *Structural Optimization* 18:156–161. DOI:10.1007/BF01195990.

Hinton, E.; RAO, N.V.R.; SIENZ, J. 1992. Finite element structural shape and thickness optimizations of axisymmetric shells, *Engineering Computations* 9(5):499–527.

Hinton, E.; Sienz, J.; Ozacka, M. 2003. *Analysis and Optimization of Prismatic and Axisymmetric Shell Structures*. Publisher: Springer. 496 p.

Hung, N. D.; Yan, A. M. 2000. *Direct finite element kinematical approaches in limit and shakedown analysis of shells and elbows*. In: *Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads, Theory and Engineering applications*. Kluwer Academic Publishers 233–254.

Kačianauskas, R.; Čyras, R. 1988. The integral yield criterion of finite elements and its application to limit analysis and optimization problems of thin-walled elastic-plastic structures, *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering* 67(2): 131–147. doi:10.1016/0045-7825(88)90121-1.

Kaklauskas, G.; Gribniak, V.; Jakubovskis, R.; Gudonis, E.; Salys, D.; Kupliauskas, R. 2012. Serviceability analysis of flexural reinforced concrete members, *Journal of civil engineering and management* 18(1): 24–29. doi.org/10.3846/13923730.2011.643553.

Kala, Z.; Kala, J. 2013. Uncertainty and Sensitivity Analysis of Beam Stability Problems using Shell Finite Elements and Nonlinear Computational Approach, *In Safety, Reliability, Risk and Life – Cycle Performance of Structures and Infrastructures*. New York, USA: 2013. p. 1–4. ISBN: 978-1-138-00086- 5.

Kalanta, S. 1994. *3 Skyrius. Tamrpiosios plokštes ir kevalai*, knygoje: Karkauskas, R.; Krutinis, A.; Atkočiūnas, J.; Kalanta, S.; Nagevičius, J. 1994. Statybinės mechanikos uždavinių sprendimas kompiuteriais, Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla. 264 p.

Kalanta, S. 1996. The problems of limit load analysis and optimization using equilibrium finite elements, *Statyba* 3(7): 6–22 (in Russian).

Kalanta, S. 2007. *Taikomosios optimizacijos pagrindai*, Vilnius: Technika. 480 p.

Kaliszky, S.; Lógó, J. 2002. Plastic behaviour and stability constraints in the shakedown analysis and optimal design of trusses, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 24(2): 118–124.

Karkauskas, R.; Krutinis, A.; Atkočiūnas, J.; Kalanta, S.; Nagevičius, J. 1994. Statybinės mechanikos uždavinių sprendimas kompiuteriais, Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla. 264 p.

Karkauskas R., Popov M. 2011. The Analysis of Geometrically Nonlinear Elastic-Plastic Space Frames, *Journal of Civil Engineering and Management* 17(4):pp. 558–568. <http://dx.doi.org/10.3846/13923730.2011.602983>.

Koiter, W. T. 1960. *General theorems for elastic-plastic solids*, in I. N. Sneddon, R. Hill (eds.). *Progress in solid mechanics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, pp. 165–221.

König, J. A.; Sawczuk, A.; Paprocka-Garlicka, W. 1974. *Obliczanie ram i belek na przystosowanie*, Zesz. Problemowe Mostostal 5, Warszawa.

König, J. A. 1975. *On optimum shakedown design*, in Sawczuk, A. and Mróz, Z. (Eds.). *IUTAM Symp. Optimization in Structural Design*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 405–414.

König, J. A.; Maier, G. 1981. Shakedown analysis of elastoplastic structures: a review of recent developments, *J. Nuclear Engineering Design* 66: 81–95.

König, J. A. *Shakedown of elastic-plastic structures*. Elsevier, Amsterdam. 1987.

König, J. A.; Siemaszko, A. 1988. A strain-hardening effects in shakedown process. *Ingenieur-Archiv* 58.58–66.

Kress R. 2014. *Linear Integral Equations*. 3<sup>rd</sup> ed., Springer New York, 427 p. doi10.1007/978-1-4614-9593-2.

Kwon, Y. W.; Bang, H. 1997. *The Finite Element Method using MATLAB*, CRC Press. 527 p.

Lange-Hansen P. 1998. *Comparative Study of Upper Bound Methods for the Calculation of Residual Deformations After Shakedown*, Danmarks Tekniske Universitet, Institut for Bærende Konstruktioner og Materialer.

Lellep J., Hein H. 2002. Optimization of clamped plastic shallow shells subjected to initial impulsive loading, *Engineering Optimization* 34(5):545–556. <http://dx.doi.org/10.1080/03052150214014>.

Lellep J., Majak J. 1995. Optimal design of axisymmetric plastic shallow shells of von Mises material, *International Journal of Solids and Structures* 32(24):3693–3705. [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00003-S](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(95)00003-S).

Leonavičius, M., K.; Krenevičius, A.; Bacevičius, J. 2010. Influence of structure and mechanical properties for cyclic fracture rates of cast iron, *Mechanika* 2(82):14–20.

- Libai, A.; Simmonds, J.G. 1998. *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*. Cambridge University press. 533 p.
- Magrab, E. B.; Azarm, S.; Balachandran, B.; Duncan, J. H.; Herold, K. E.; Walsh, G. C. 2010. *An Engineers Guide to MATLAB 3rd ed.* Prentice Hall. 864 p.
- Maier, G. A matrix structural theory of piece wise-linear plasticity with interacting yield planes. *Meccanica*, Vol. 7, 1970. p. 51–66.
- Maier, G.; Zavelani, A.; Benedetti, D. 1972. A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 4: 455–473.
- Maier, G.; Comi, C.; Corigliano, A.; Perego, U.; Hübel, H. 1996. *Bounds and estimates on inelastic deformations: a study of their practical usefulness*. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities. 286 p. ISBN 92-827-5006-X.
- Maier, G.; Carvelli, V.; Cocchetti, G. 2000. On direct methods for shakedown and limit analysis, *Eur. J. Mech. A/Solids* 19: 79–100.
- Maier, G. 2001. On some issues in shakedown analysis, *Journal of Applied Mechanics*, ASME 68: 799–808.
- Maier, G.; Pastor, J.; Ponter, A. R. S.; Weichert, D. 2003. Direct Methods of Limit and Shakedown Analysis, *Comprehensive Structural Integrity*, 631–678.
- Melan, E. 1938. *Der Spannungszustand eines "Mises-Hencky'schen" Kontinuums bei veränderlicher Belastung*, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien, Vol. 147. p. 73–87.
- Mróz, Z.; Weichert, D.; Dorosz, S. 1995. *Inelastic Behaviour of Structures under Variable Loads*, Memorial Volume König, J. A. Kluwer Academic Publishers. 523 p.
- Nguyen-Dang, H., Morelle, P. 1981. Numerical shakedown analysis of plates and shells of revolution. In: *Proceedings of 3rd world congress and exhibition on FEMs*. Beverly Hills.
- Nguyen-Dang, H.; Morelle, P. 1990. Optimal plastic design and the development of practical software. In *Mathematical programming methods in structural plasticity*; Ed. by Lloyd Smith D, Berlin: Springer-Verlag. 207–229.
- Palizzolo, P.; Caffarelli, A.; Tabbuso, P. 2014. Minimum volume design of structures with constraints on ductility and stability. *Engineering Structures* 68:47–56. doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.02.025.
- Pham, D. C. 2003. Shakedown theory for elastic–perfectly plastic bodies revisited. *International Journal of Mechanical Sciences*, 45: 1011–1027.
- Popov, M.; Karkauskas, R.; Rimkus, L. 2013. The Algorithm for nonlinear inelastic optimization of 3D steel frameworks under serviceability requirements, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* 9(3):62–71.
- Portela, A.; Charafi, A. 2002. *Finite Elements Using Maple. A Symbolic Programming Approach*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg GmbH. 326 p.

- Prager, W.; Shield R. T. 1967. A general theory of optimal plastic design, *ASME Transactions Series E Journal of Applied Mechanics*, 34:184–186.
- Regalla, S. P. 2010. *Computer Aided Analysis and Design*. I.K. International Publishing House Pvt. Ltd, 280 p.
- Ritz, W. 1909. *Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations-Probleme der mathematischen Physik*. J. Reine Angew. Math. 135 p.
- Save, M.; Massonnet, C.; Saxce, G. 1997. *Plastic limit analysis of plates, shells and disks*. Elsevier Science. 603 p.
- Sawczuk, A. 1969. Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shell, *J Mech Phys Solids* 4:291–301.
- Sawczuk, A. 1974. *Shakedown analysis of elastic-plastic structures*, Nucl. Eng. Design 28: 121–136.
- Shames, I. H.; Cozzarelli, F. A. 1997. *Elastic and Inelastic Stress Analysis*, Taylor & Francis, Washington, DC.
- Skeivalas, J.; Čygas, D. 2010. Control of physical surface by detecting coordinates, *MECHANIKA* 3(21): 40–44.
- Symonds, P.S. and Neal, B.G.1951. Recent progress in the plastic methods of structural analysis, Part I, *J. Franklin Inst.* 252(5):383–407.
- Symonds, P.S. and Neal, B.G.1951. Recent progress in the plastic methods of structural analysis, Part II, *J. Franklin Inst.* 252(6):469–492.
- Staat, M.; Heitzer, M. 2002. The restricted influence of kinematic hardening on shakedown loads. In: *Mang H. A., Rammerstorfer F. G., Eberhardsteiner J. (eds.). Proceedings of the Fifth World Congress on Computation Mechanics, Vienna/Austria*. Publisher: Vienna University of Technology, Austria.
- Staat, M.; Heitzer, M. (Eds.). 2003. Numerical methods for limit and shakedown analysis. *Series of John von Neumann Institute for Computing*, 15:282 p.
- Stein, E.; Zhang, G.; Mahnken, R., 1993. Shake-down analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials. In: *Progress in Computational Analysis of Inelastic Structures*. Springer Verlag, pp. 175–244.
- Stein, E.; Zhang, G.; Huang, Y.; Mahnken, R.; Wiechmann, K. 2001. Theoretical and Computational Shakedown Analysis of Non-Linear Kinematic Hardening Material and Transition to ductile Fracture. *Plasticity of metals:experiments, models, computations, collaborativ research Centres*. ISBNs:3-527-60011-6.
- Tangaramvong, S.; Tin-Loi, F.; Wu, D.; Gao, W. 2013. Mathematical programming approaches for obtaining sharp collapse load bounds in interval limit analysis, *Computers and Structures* 125:114–126.
- Timoshenko, S.; Woinowsky-Krieger, S. 1959. *Theory of Plates and Shells*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill; 581 p.

Tin-Loi, F. 2000. Optimum shakedown design under residual displacement constraints, *Struct Multidiscip Optim* 19(2):130–139.

Venckus, N.; Bliūdžius, R.; Poderytė, J.; Burlingis, A. 2012. The heating load determination of low energy buildings in northern climate, *Journal of Civil Engineering and Management* 18(6): 828–833. doi:10.3846/13923730.2012.720938.

Weichert, D.; Maier, G. 2000. *Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads*, Netherlands, Dordrecht: Springer. 385 p.

Weichert, D.; Maier, G. 2002. *Inelastic behavior of Structures under Variable Repeated Loads*, Springer-Verlag Wien GmbH, 393 p.

Wiechmann, K.; Stein E. 2006. Shape optimization for elasto-plastic deformation under shakedown conditions, *International Journal of Solids and Structures* 43:7145–7165. doi:10.1016/j.ijsolstr.2006.03.025.

Wiechmann, K.; Barthold, F.J.; Stein, E. 1997. Optimization of elasto-plastic structures using the finite element method. In: *Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1013–1018.

Yu, M.-H. 2004. *Unified Strength Theory and Its Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 424 p.

Zienkiewicz, O. C.; Morgan, K. 1982. *Finite Elements and Approximation*, Wiley Interscience, New York.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z. 2013. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7th ed., Publisher: Publisher: Butterworth-Heinemann, 756 p.

Zyczkowski, M. 1981. *Combined Loadings in the Theory of Plasticity*. Springer Science & Business Media, 714 p.

---

## Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas

### **Straipsniai recenzuojamuose mokslo žurnaluose**

Venskus, A.; Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Ulitinas, T. 2010. Integrated load optimization of elastic-plastic axisymmetric plates at shakedown, *Journal of civil engineering and management: international research and achievements* 16(2): 203–208. doi:10.3846/jcem.2010.22.

Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Ulitinas, T.; Grigusevičius, A. 2012. Optimization of bridge trusses height and bars cross-sections, *The Baltic journal of road and bridge engineering* 7(2): 112–119. doi:10.3846/bjrbe.2012.16.

Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Ulitinas, T. 2012. The discrete model and the analysis of a spherical shell by finite equilibrium elements, *Mechanika* 18(3): 266–272. doi.org/10.5755/j01.mech.18.3.1886.

### **Straipsniai kituose leidiniuose**

Kalanta, S.; Atkočiūnas, J.; Ulitinas, T. 2013. Equilibrium finite elements of spherical shells in analysis problems, *Procedia Engineering. 11th international conference on modern building materials, structures and techniques (MBMST)* 57: 515–523. doi:10.1016/j.proeng.2013.04.066.

Ulitas, T.; Kalanta, S. 2010. Santvarų aukščio optimizavimas, *Mokslas – Lietuvos ateitis: Statyba, transportas, aviacinės technologijos* [*Science – Future of Lithuania: Civil and Transport Engineering, Aviation Technologies*] 2(6): 56–60. doi:10.3846/mla.2010.112.

Ulitas, T.; Kalanta, S.; Atkočiūnas, J. 2013. Sferinio kevalo saugos ribinio būvio analizė, *Engineering structures and technologies* 5(2): 67–75. doi:10.3846/2029882X.2013.818192.

Ulitas, T. 2013. Optimized design and sensitivity analysis of elastic steel plane frames, *MENDEL 2013: 19th international conference on soft computing*, Brno, Czech Republic, June 26-28, 2013. Brno : Brno University of Technology, 2013.



---

# Summary in English

## Introduction

### Problem formulation

The basis of the structural design tasks are structural mechanical optimization problems, depending on the main strength (yield) conditions, the rigidity and the stability limits. The abundant of structural material properties, limitations and effects provoke us to create new structural mechanics methods. In this thesis the steel structure will be research with the possible plastic deformation. The construction can be collapse, when plastic deformations or the opening up cracks are too big under repeated-variable load. However, the design can "create" such a state of stress, which never go beyond allowable limits, when plastic deformations appears. Such a case is called the structures shakedown at a given load. The shakedown phenomenon is possible examined only simple structures. So, the dissertation thesis is very relevant about elastic-plastic shakedown shell structures examining modern numerical methods of mathematical programming at civil engineering theory and practice. The formulation of analysis and optimization of spherical shell is based on extreme energy principles and theory of mathematical programming, as shown the scientific literature, is promising.

## Relevance of the thesis

In the analysis of the shell structures application of shakedown theory methods are new direction at practice of reservoir vessels and construction calculations and design. So, mathematical model of shakedown-spherical shell optimization is created taking into account the strength (yield) conditions and stiffness constrains in the dissertation. This is a non-linear mathematical programming problem. Author improved applications of the PBE methodology increases works topically not only for elastic shells, but also elastic-plastic shells. The analysis and description of the method of shell discretization by equilibrium finite elements are still lacking in the scientific literature.

## Research object

The mathematical models of analysis and optimizations of shakedown-spherical shell are considered under displacement constrain in the dissertation. Discrete mathematical models of optimization tasks are composed by the equilibrium finite element method. As well as the development and the application of energy principles and innovative computer technology for spherical shell calculations.

## Aim of the thesis

The goal of the thesis is to develop mathematical models and their solution algorithms of analysis and optimization problem of elastic-plastic spherical shell, taking into account the ultimate and serviceability limit states and structural constraints. The realization of numerical experiments ensuring the successful solutions convergence of the goal.

## Task of the thesis

To reach the goal of the work, following problems must be consider:

1. A summary of the general tendencies in the modern scientific shakedown theory.
2. To perform review of the analytical literature about the spherical shell calculation (elastic, elastic-plastic stage).
3. To develop construction discretization methodology by equilibrium finite elemnts.
4. To create mathematical models of elastic spherical shell calculation. To compare internal forces and displacements of elastic spherical shell with the obtained results under the analytical expressions, numerical formulas in scientific literature.
5. To make mathematical models of analysis and optimization of elastic-plastic spherical shells. To create an algorithm for calculating strain and stress state to determine and optimization tasks with different optimality criteria to solve.
6. To perform numerical experiment of optimizations problem of shallow spherical shell under displacement constrain at shakedown state.

## Research methodology

The methodology is based on the numerical methods of mechanics, energy principles and mathematical programming theory. In the shakedown analysis the statically possible internal forces are used: PBE enable to obtain a more accurate their distribution compared with other numerical methods. Investigations were carried out and the numerical experiment results obtained under the assumptions of small displacements.

## Scientific value of the research findings

To create mathematical models of the verification and design of shakedown-spherical shells nonlinear optimization under the strength (yield) condition (ultimate limit state) and stiffness constrain (serviceability limit state). Has been proven that the residual displacement varies non-monotonous during the shakedown process. Revealed possibility of equations of residual deformation harmony, forming mathematical models of new computing task with residual displacements variation bounds.

The calculation algorithm of mathematical model was proposed for shakedown-shells optimization problem, which corresponding ultimate limit and serviceability limit states.

Created methodology allows faster and to more effective to solve the nonlinear convex mathematical programming problems in *MATLAB* environment.

## Practical significance of the results

The optimization algorithms and mathematical models of the new shakedown-spherical shells is developed taking into account the strength (yield) condition and stiffness and constructive constraints.

Introduction of shakedown theory to the formulations of spherical shells optimization opens up perspectives and cylindrical shells. Namely the pressure of repeated-variable load is discussed in the author thesis. Inter-element effects will allow control not only the pipelines, but also the shell structures applicable in the metallurgical industry.

## Defended statement

1. To create the general discrete models of analysis and optimization of continuum steel structures.
2. Construction shakedown to a given load, if the feasible solution domain of the static analysis task is not empty.
3. The formulation of analysis and optimization tasks of a spherical shell are based on the extreme energy principles, mathematical programming theory and equilibrium finite elements.
4. The creation of methodology for nonlinear optimization problem solution of spherical shells taking into account the ultimate limit and serviceability limit states.

5. The complementary slackness condition of mathematical programming prevent unambiguously to determine residual displacements of shakedown state in the formulation of kinematic analysis problem.

## Approval of the research findings

Dissertation topics 7 articles was published in refereed scientific journals. A list of the author's publications is in page 89.

Research results were approved in 4 scientific conferences:

- Junior Researches Conference “Science – Future of Lithuania” in 2010 Vilnius.
- Junior Researches Conference “Science – Future of Lithuania” in 2012 Vilnius.
- International Scientific Conference „*Modern building materials, structures and techniques*“ in 2013 Vilnius.
- International Scientific Conference „*Mendel 2013: 19th international conference of soft computing*“ in 2013 Brno, Czech Republic.

## Structure of the thesis

The dissertation consist of the introduction, 3 chapters, general conclusions, 113 list of scientific literature. In the end submit the list of published scientific works on the topic of the dissertation, summary in English and 5 annexes.

The total scope of the scientific work – 113 pages without annexes. In the text 121 numbered formulas, 33 figures and 11 tables.

## Acknowledgment

I sincerely thank manager Prof Habil Dr Juozas Atkočiūnas, discloses me principles and methods of shakedown theory. Thank you for my Master's Degree manager Prof. Dr. Stanislovas Kalanta for advices in this doctoral thesis. Also thanks colleagues from Brno univerty of technology, which advised me during the internship.

My grateful thanks for my colleagues from the Department of structural mechanics of VGTU for cooperation, ideas and advice.

## 1. An analytical review of scientific literature of spherical shells optimization at shakedown

Often construction experience effects with clear, their variation in time  $t$ , the cyclical characteristics. In dissertation work that load will be called repeated-variable load (RVL): it's a system forces, wherein each or its groups may vary independently of each other in given bound. Stress and strain state of the structures, which may have plastic deformation, depends on the load history. Therefore, the calculation of elastic-plastic structures is

complicated, when RVL is applied and is defined only its variation bounds. Under the repeated-variable loading, a structure may fail, i.e. undergo cycle-plastic collapse because of the accumulated to large plastic deformations (the so-called progressive failure) or because of the low-cycle fatigue (a collapse caused by alternating plasticity) (Atkočiūnas 2011). Such case is dangerous even when any of the load combinations effects is not in itself dangerous in the plastic cycle-collapse sense. There is a third case, when the plastic deformation is caused the internal forces (stress)  $S_r$  in initial load case, which ensure the further load progress – only in elastic construction work. This phenomena is called structural *shakedown*. It is subject of analysis of this dissertation thesis.

Theorem of shakedown-construction under RVL for necessary criteria at shakedown state (Melan 1938) says: *construction will shakedown, if there exist such a residual stresses time-independent in the each body point, that their sum with part of variable stress  $\sigma_{ij}^{(e)}$  composes allowable stress state  $\sigma$  of all loads combinations varying within given bounds*. This theorem became the first classical (static) shakedown or Melan's theorem. Statically allowable residual stresses must satisfy the strength (yield) and the equilibrium conditions:

$$f(\sigma_{ij}^{(e)} + \rho_{ij}) < 0, \quad (S1.1)$$

$$\rho_{ij,j} = 0, \quad \rho_{ij} u_j = 0. \quad (S1.2)$$

Here  $f(\sigma_{ij}) = 0$  – an equation of yield surface. So, if conditions (S1.1–S1.2) is satisfied, then construction will shakedown.

Construction non-shakedown conditions formulated Koiter. It's became the second (Koiter) theorem. Koiter non-shakedown (kinematic) theorem (Koiter 1960) says: *elastic-plastic construction will be collapse, when acting variable load in time  $t$  collapse, if there is kinematically permissible rate field, which external forces capacity exceeds the maximum possible energy dissipation*. In this way shakedown is impossible, if valid inequality:

$$\int_0^{\tau} \left\{ \int X_i u_{i0} dV + \int_{S_p} q_i u_{i0} dS \right\} d\tau > \int_0^{\tau} d\tau \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,0}'' dV. \quad (S1.3)$$

Here  $\varepsilon_{ij,0}''$  – the field of kinematically allowable plastic deformations;  $u_{i0}$  – the rate of residual displacement;  $X_i, q_i$  – the load of volume and surface. Meier proved (Maier 1970) that there is a clear dual link between static and kinematic formulation.

The actual issues of shakedown theory reveals in the application of civil engineering: energy mechanics principle, its realization validating mathematical programming methods, equilibrium finite elements (EFE). The latters is determined statically possible stress-adapted for structural analysis. However, optimization solutions of shells, among them the spherical, is still lacking at shakedown state.

## 2. Discretization of spherical shells by equilibrium finite elements

Stress and strain analysis tasks of shallow spherical shells are formulated as: construction with the physical parameters (modulus of elasticity  $E$ , poisson ratio  $\nu$ ) and geometric characteristics (curvature radius  $R_0$ , or base height  $f_h$  and base diameter  $L$ ) are known. Also external forces meaning and its adding places are known.

In this chapter, the discretization of a spherical shell is thoroughly investigated by the equilibrium circular finite elements, which enables the authors to apply the unified methodology to the analysis of the elastic and elastic-plastic shells (Belytschko 1972; Čyras *et al.* 1974; Gallagher 1975; Kalanta 1995; Čyras *et al.* 2004). The equilibrium finite element is symmetrically loaded for flat spherical shells. The bending moments and axial forces are described by the second- and first-degree polynomials. The element's differential statics equations, describing the balance between the internal and external forces, are replaced with algebraic equilibrium equations presented in the Bubnov-Galerkin method (Fletcher 1984; Dube *et al.* 2001; Kress 2014). The mathematical model and the calculation algorithm of the internal forces and displacements in the shell analysis are developed and formulated, using the equations of statics and geometry. The analysis and description of the method of shell discretization by equilibrium finite elements are still lacking in the scientific literature.

General mathematical models of optimal structure with described are presented in this chapter with detailed explanation of their application to perfectly elastic, elastic-plastic flat spherical shells (Fig. S1– S3) (Franco *et al.* 1997a,b; Staat *et al.* 2003; Trần *et al.* 2008).

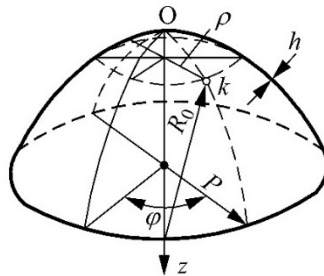
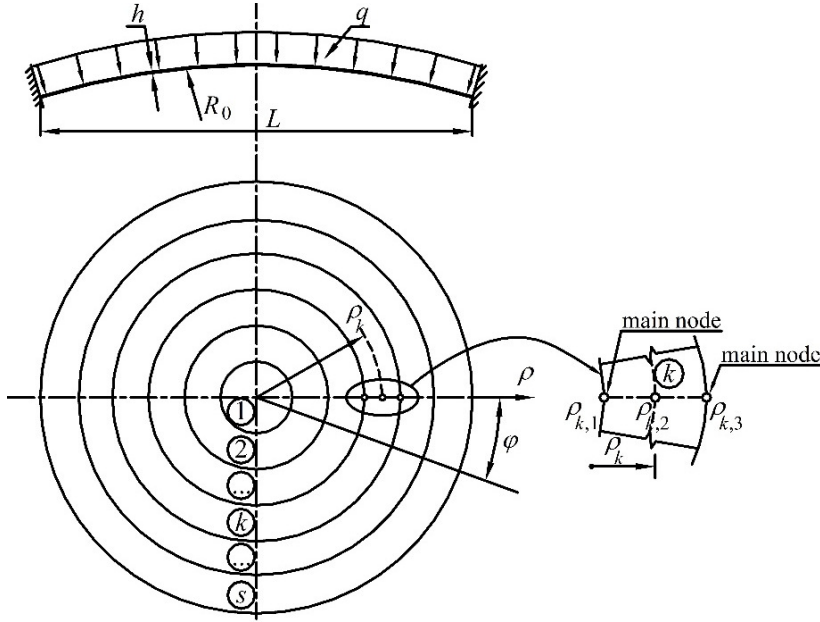


Fig. S1. Geometrical scheme of a shallow spherical shell

A discrete model of a shell is constituted of uniformly distributed circular equilibrium finite elements possessing three nodes each (Fig. 3) (Belytschko 1975; Gallagher 1975; Kalanta 1994; Weicher *et al.* 2002). Dependencies of chapter are detailed overview for elastic-plastic spherical shells. Equilibrium finite element method applied for the analysis of elastic-plastic shell. The functions  $S_k(x)$  of the elastic-plastic shells can have breaks. In order to increase the accuracy of the

results, these breaks must be considered. However, the breaks can be modelled only in the nodes, where the elements are connected.



**Fig. S2.** Discretization of a shallow spherical shell by  $s$  circular elements with three nodal points

Therefore, while choosing the elements mesh, not only the geometry of the structure and distribution of the external loads, but also the possible places of the breaks should be considered.

The spherical shells (Fig. S1) are investigated in the polar coordinate system  $\rho, \varphi, z$  with the origin in the center of the structure (Fig. S2). It is sufficient to investigate only one radius of such a shell, since the internal forces and displacements are independent with respect to the coordinate  $\varphi$ , when symmetric loading is applied. The second-order circular element is used for discretization. The shell is modelled by the circular finite elements  $k=1, 2, \dots, s$ , connected in the main discrete model nodes. The discrete shell model is regular for circular elements of the same width. The assumption is made that physical properties of the material (the elastic modulus  $E$  and Poisson's ratio  $\nu$ ), shell thickness  $h$ .

The external load  $\mathbf{q}(\rho) \equiv [p_\rho(\rho) p_n(\rho)]^T$  can be distributed over the surface of the finite elements or concentrated in the main node. The stress state of the shell under the symmetrical loading is described by the vector-function of the internal forces  $\mathbf{S}(\rho) \equiv [M_\rho(\rho) M_\varphi(\rho) N_\rho(\rho) N_\varphi(\rho)]^T$  (Fig. S3). The bending moments  $M_\rho(\rho)$ ,

$M_\varphi(\rho)$  and the axial forces of intensity functions  $N_\rho(\rho)$ ,  $N_\varphi(\rho)$  are the stress vector's components (their positive directions are shown in Fig. S3).

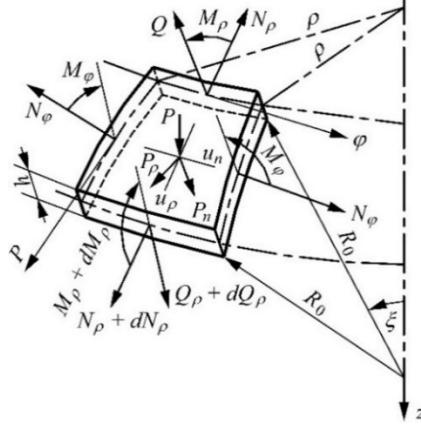


Fig. S3. Internal forces of element of a shallow spherical shell

The vectors-functions  $\mathbf{S}(\rho)$  and  $\mathbf{q}(\rho)$  are related by the differential equations of statics

$$\mathcal{A} \mathbf{S}(\rho) = \mathbf{q}(\rho). \quad (\text{S2.1})$$

where the differential operator is

$$\mathcal{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} & \frac{1}{\rho} \\ -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} & -\frac{1}{R_0} & -\frac{1}{R_0} \end{bmatrix},$$

where  $R_0$  is the radius of curvature of the shell.

The circular element is investigated in the system of the local coordinate  $\xi$ . The nodal internal forces are shown in Fig. S4. The relation between the global coordinate  $\rho_k$  and the local coordinate  $\xi_k$  is described by the dependences as follows:

$$\xi_k = (\rho_k - \rho_{k2}) / b_k; \quad \rho_k = \rho_{k2} + \xi_k b_k. \quad (\text{S2.2})$$

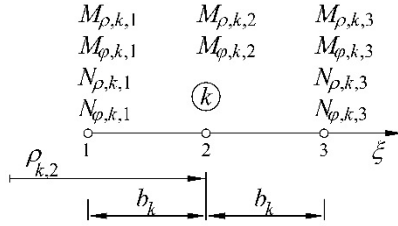
here  $\rho_{k2}$  is the coordinate of the second node in the global coordinate system  $\rho, \varphi, z$ ;  $2b_k$  is the width of the finite element. The bending moments  $\mathbf{M}_{\rho,k,i} = (M_{\rho,k,1} \ M_{\rho,k,2} \ M_{\rho,k,3})$  and  $\mathbf{M}_{\varphi,k,i} = (M_{\varphi,k,1} \ M_{\varphi,k,2} \ M_{\varphi,k,3})$  in the elements are described by the second-degree polynomials, while the axial forces



$\mathbf{N}_{\rho,k,i} = (N_{\rho,k,1} \ N_{\rho,k,3})$  and  $\mathbf{N}_{\varphi,k,i} = (N_{\varphi,k,1} \ N_{\varphi,k,3})$  – by the first-degree polynomials:

$$\begin{aligned} M_{\rho,k}(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)M_{\rho,k,1} + (1 - \xi_k^2)M_{\rho,k,2} + \frac{1}{2}(\xi_k^2 + \xi_k)M_{\rho,k,3}, \\ M_{\varphi,k}(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi_k^2 - \xi_k)M_{\varphi,k,1} + (1 - \xi_k^2)M_{\varphi,k,2} + \frac{1}{2}(\xi_k^2 + \xi_k)M_{\varphi,k,3}, \\ N_{\rho,k}(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_k)N_{\rho,k,1} + \frac{1}{2}(1 + \xi_k)N_{\rho,k,3}, \\ N_{\varphi,k}(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_k)N_{\varphi,k,1} + \frac{1}{2}(1 + \xi_k)N_{\varphi,k,3}. \end{aligned} \quad (\text{S2.3})$$

Thus, the stress state of the element is described by the vector of the internal forces  $\mathbf{S}_k = (\mathbf{S}_{k,1} \ \mathbf{S}_{k,2} \ \mathbf{S}_{k,3})$ , here  $\mathbf{S}_{k,1} = (M_{\rho,k,1} \ M_{\varphi,k,1} \ N_{\rho,k,1} \ N_{\varphi,k,1})$ ,  $\mathbf{S}_{k,2} = (M_{\rho,k,2} \ M_{\varphi,k,2})$ ,  $\mathbf{S}_{k,3} = (M_{\rho,k,3} \ M_{\varphi,k,3} \ N_{\rho,k,3} \ N_{\varphi,k,3})$ , which is composed of the internal forces of all three nodes  $i = 1, 2, 3$  (Fig. S4).



**Fig. S4.** Internal forces of circular element nodes (1, 2, 3)

The functions of internal forces, defining the stress state, are approximated by all the vector-functions of the internal forces having a finite number of elements:

$$\mathbf{S}_k(\xi) = \mathbf{H}_k(\xi)\mathbf{S}_k, \text{ here } k = 1, 2, \dots, s \quad (\text{S2.4})$$

here  $\mathbf{H}_k(\xi)$  is the interpolation matrix of the element's internal forces, developed in the local coordinate system  $\xi$  is presented in table S1.  $\mathbf{S}_k$  is the vector of the internal forces of the element's nodes. Thus, the stress state of the discrete model is defined by the internal forces' vector  $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k, \dots, \mathbf{S}_s)^T$ . It is one of the unknowns of the computational shell problem.

The components  $\mathbf{P}_{ki} = (\bar{M}_{\rho,ki}, \bar{N}_{\rho,ki}, \bar{Q}_{\rho,ki})^T$  of the vector  $\mathbf{P}_k = (\mathbf{P}_{k1}, \mathbf{P}_{ek}, \mathbf{P}_{k3})^T$  of the generalized forces are the concentrated forces of the  $k$ -th element's nodes  $i = 1, 3$ . The equilibrium between the adjacent finite elements is described by the forces  $\mathbf{P}_{k1} = (P_{k1}, P_{k2}, P_{k3})^T$ , and  $\mathbf{P}_{k3} = (P_{k8}, P_{k9}, P_{k10})^T$ , while the vector  $\mathbf{P}_{ek} = (P_{k4},$

$P_{k5}, P_{k6}, P_{k7})^T$  consists of the element's radius  $\rho$  at the nodes 1 and 3 and the forces applied in the direction of the element's middle surface normal  $n$ , which match the element's inner balance. They are used to describe the differential equations of statics of the element (S2.5). The components of the vector  $u_k$  are linear and angular displacements (in the directions  $\rho$  and  $n$ ) at the element's boundary nodes, corresponding to the boundary and internal statics equations. The degree of freedom of the element is  $m_k = 10$ .

Algebraic internal equilibrium equations of the finite element are obtained by inserting the functions (S2.4) into the Eqs. (S2.1) and differentiating:

$$\mathbf{A}_k(\xi_k) \mathbf{S}_k = \mathbf{q}_k. \quad (\text{S2.5})$$

The operator of these algebraic equations  $\mathbf{A}_k(\xi_k)$  is presented in table S1.

**Table S1.** The algebraic operator of the element's equilibrium equations  $\mathbf{A}_k^T(\xi_k)$

Internal forces	Forces corresponding internal equilibrium of the element	
	$N_{k,l}$	$Q_{k,l}$
$M_{\rho,k,1}$		$-\frac{2\xi_k - 1}{b_k(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)} - \frac{1}{b_k^2}$
$M_{\varphi,k,1}$		$\frac{\xi_k - 0,5}{b_k(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)}$
$N_{\rho,k,1}$	$-\frac{1 - \xi_k}{2(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)} + \frac{1}{2b_k}$	$-\frac{1}{2R_0}(1 - \xi_k)$
$N_{\varphi,k,1}$	$\frac{1 - \xi_k}{2(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)}$	$-\frac{1}{2R_0}(1 - \xi_k)$
$M_{\rho,k,2}$		$\frac{4\xi_k}{b_k(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)} + \frac{2}{b_k^2}$
$M_{\varphi,k,2}$		$-\frac{2\xi_k}{b_k(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)}$
$M_{\rho,k,3}$		$-\frac{2\xi_k + 1}{b_k(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)} - \frac{1}{b_k^2}$
$M_{\varphi,k,3}$		$\frac{\xi_k + 0,5}{b_k(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)}$
$N_{\rho,k,3}$	$-\frac{1 + \xi_k}{2(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)} - \frac{1}{2b_k}$	$-\frac{1}{2R_0}(1 - \xi_k)$
$N_{\varphi,k,3}$	$\frac{1 + \xi_k}{2(\rho_{k,2} + \xi_k b_k)}$	$-\frac{1}{2R_0}(1 - \xi_k)$

The static equations of the element can be expressed by the equilibrium equations of the element boundary nodes which are created, using Bubnov-Galerkin collocation method (Agoshkov *et al.* 2006, Regalla 2010, Desai *et al.* 2011).

$$\mathbf{P}_{ek} = \mathbf{A}_{ek} \mathbf{S}_k = \mathbf{F}_{ek}. \quad (\text{S2.6})$$

here

$$\mathbf{A}_{ek} = 2\pi b_k \int_{-1}^1 \mathbf{G}_k(\xi_k) \mathbf{A}_k(\xi_k) \mathbf{S}_k(\rho_{k2} + \xi_k b_k) d\xi_k, \quad (\text{S2.7})$$

$$\mathbf{F}_{ek} = 2\pi b_k \int_{-1}^1 \mathbf{G}_k(\xi_k) \mathbf{q}_k(\rho_{k2} + \xi_k b_k) d\xi_k. \quad (\text{S2.8})$$

Here the matrix of the influence functions is

$$\mathbf{G}_k(\xi_k) \equiv \begin{bmatrix} 0,5(1-\xi_k) & 0,5(1-\xi_k) \\ 0,5(1+\xi_k) & 0,5(1+\xi_k) \end{bmatrix}. \quad (\text{S2.9})$$

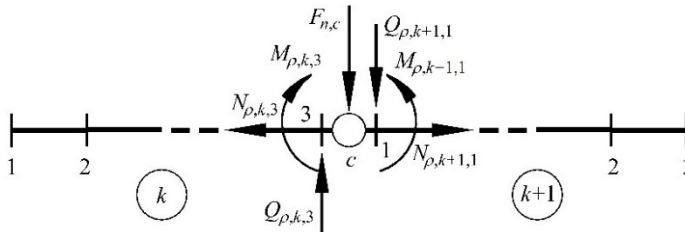
An External force vector  $\mathbf{F}_{ek}$  in matrix form:

$$\mathbf{F}_{ek} = \frac{2\pi b_k}{3} \begin{bmatrix} 3\rho_{k2} - b_k & 0 \\ 0 & 3\rho_{k2} - b_k \\ 3\rho_{k2} + b_k & 0 \\ 0 & 3\rho_{k2} + b_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{\rho,k} \\ p_{n,k} \end{bmatrix} = \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k. \quad (\text{S2.10})$$

The static equations of the node  $l \in L$ , are connected (Fig. S5), where the elements  $k$  and  $k+1$ , are composed of the equilibrium equations of bending moments, shear forces and axial forces:

$$\begin{aligned} 2\pi\rho_{k3}(-M_{\rho,k,3} + M_{\rho,k+1,1}) &= 0, \\ 2\pi\rho_{k3}(-N_{\rho,k,3} - N_{\rho,k+1,1}) &= 0, \\ 2\pi\rho_{k3}(Q_{\rho,k,3} - Q_{\rho,k+1,1}) &= 2\pi\rho_{k3}F_{n,c}, \end{aligned} \quad (\text{S2.11})$$

here  $F_{n,c}$  is the intensity of the normally distributed load in the circular element  $\rho_c$ . Their coefficients are made matrices  $\mathbf{A}_{k,1}$  and  $\mathbf{A}_{k,3}$ .



**Fig. S5.** Forces acting on the main node of the shell

The static equations of the shear forces are created, using the dependency:

$$Q_{\rho,k}(\xi_k) = \frac{1}{\rho_k} [M_{\rho,k}(\xi_k) - M_{\varphi,k}(\xi_k)] + \frac{dM_{\rho,k}(\xi_k)}{d\xi_k} \frac{d\xi_k(\xi_k)}{d\rho_k} . \quad (S2.12)$$

The matrices  $\mathbf{A}_{k,1}$  and  $\mathbf{A}_{k,3}$  define the relationship between the internal forces of the element's boundary nodes and the generalized forces. Sub-matrices  $\mathbf{A}_{k,1}$ ,  $\mathbf{A}_{ek}$  and  $\mathbf{A}_{k,3}$  make the matrix of equations of statics of the shell element  $\mathbf{A}_k$ . The Eqs. (S2.6) of all the elements and the Eqs. (S2.11) of all main nodes make the algebraic system of the equilibrium equations of the shell discrete model:

$$\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{F}, \quad (S2.13)$$

here  $\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k, \dots, \mathbf{S}_s]^T$  the vector of the discrete model internal forces composed of all elements,  $\mathbf{A}$  – the coefficient matrix of equilibrium equations is shown for one element in table S3,  $\mathbf{F} = [F_1, F_2, \dots, F_m]^T$  – the vector of external forces.

The geometrical equations  $\mathbf{\Theta}_k = \mathbf{A}_k^T \mathbf{u}_k$  of the discrete model are created, applying the principle of virtual forces. With reference to the physical equations  $\mathbf{\Theta}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{S}_k$ , the compatibility of the displacements  $\mathbf{u}$  and strains  $\mathbf{\Theta}$  in the elastic structure is described by the equation:

$$\mathbf{D}_k \mathbf{S}_k - \mathbf{A}_k^T \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad (S2.14)$$

and in a series of equations

$$\mathbf{D}\mathbf{S} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (S2.15)$$

here  $\mathbf{D}_k$  – elements  $k$ -th flexibility matrix (table S4), which is determined using formula

$$\mathbf{D}_k = 2\pi b_k \int_{-1}^1 \mathbf{H}_k^T(\xi_k) \mathbf{d}_k \mathbf{H}_k(\xi_k) (\rho_k 2 + \xi_k b_k) d\xi_k, \quad k=1,2,\dots,s, \quad (S2.16)$$

here  $\mathbf{H}_k(\xi_k)$  denotes the interpolation matrix of the internal forces (table S1);  $\mathbf{d}_k$  is the flexibility matrix of the infinitesimal element

$$\mathbf{d}_k = \frac{1}{E_t h_k} \begin{bmatrix} 12 / h_k^2 & -12 / h_k^2 & 0 & 0 \\ -12 / h_k^2 & 12 / h_k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\nu_k \\ 0 & 0 & -\nu_k & 1 \end{bmatrix}$$

The mathematical model of the problem of the analysis of the elastic shell's displacements and internal forces

$$\mathbf{A} \mathbf{S}_e = \mathbf{F}, \quad (\text{S2.17})$$

$$\mathbf{D} \mathbf{S}_e - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_e = \mathbf{0}. \quad (\text{S2.18})$$

consists of  $m$  algebraic equations of statics and  $n$  geometric equations. The unknowns are the  $n$ -dimensional vector  $\mathbf{S}_e$  of internal forces and the  $m$ -th dimensional displacement vector  $\mathbf{u}_e$ . The system of equations (S2.17)–(S2.18) defines the stress and strain state of the construction. The main system of equations of equilibrium finite elements is a connecting-link to the elastic-plastic shells calculation (Kalanta 1996; Leonavičius *et al.* 2010; Atkočiūnas 2011).

The displacement equation

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_e = \mathbf{F}, \quad (\text{S2.19})$$

obtained from the mathematical model (9)–(10) by eliminating the internal forces

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{u}_e, \quad (\text{S2.20})$$

here  $\mathbf{K}$  is the global stiffness matrix of the construction

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T = \sum_{k=1}^s \mathbf{A}_k \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{A}_k^T. \quad (\text{S2.21})$$

Displacements are calculated by the formula

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, \quad (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} = \boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{u}_e = \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}, \quad (\text{S2.22})$$

and the internal forces in the elements' nodes are calculated by the formula (S2.20) or can express

$$\mathbf{S}_e = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta} \mathbf{F}, \quad \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{S}_e = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{F}. \quad (\text{S2.23})$$

Though stiffness matrix  $\mathbf{K}$  can be calculated by the formulas (S2.21), in the developed program, it is constructed in a usual way, based on the finite element stiffness matrices and using the algorithm described in the article (Čyras *et al.* 1974).

A clamped shallow spherical shell under uniform pressure and the concentrated force to the rigid disk is presented in Fig. S6.

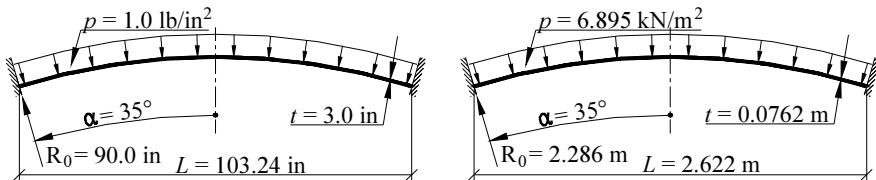


Fig. S6. Spherical shell under uniform load  $p$

Physical parameters  $\nu = 1/6$  and  $E = 2 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$  (13,79 GPa). Comparative analysis is carried out by means the work of other authors. So necessary dimensional units variety.

Units of expression in the *SI* system of units:  $1,0 \text{ in} = 0,0254 \text{ m}$ ;  $1,0 \text{ lb/in} = 175,13 \text{ N/m}$ ;  $1,0 \text{ lb/in}^2 = 6,895 \text{ kN/m}^2$ . The calculation results of elastic shell coincide well, this see from tables S4 and S5.

**Table S4.** Internal forces and displacement values using Hinton *et al.* 2003

Degree of freedom	Element type	$u_{n,\max}$		$N_\phi$ ties $\alpha = 0^\circ$		$M_\rho$ ties $\alpha = 35^\circ$	
		in	mm	lb/in	kN/m	lb in/in	kN m/m
16	linear	0.93986	23.87	51.17	8.9640	19.02	0.0847
	quadratic	0.80398	20.39	47.69	8.3519	29.43	0.1310
	cubic	0.81052	20.58	45.55	7.9872	34.46	0.1534
28	linear	0.84731	21.52	48.51	8.4956	26.07	0.1161
	quadratic	0.41067	20.59	47.37	8.2959	33.29	0.1482
	cubic	0.81192	20.62	46.95	8.2224	35.77	0.1592
52	linear	0.82654	20.99	47.84	8.3782	29.45	0.1311
	quadratic	0.81183	20.62	47.33	8.2889	35.35	0.1574
	cubic	0.81196	20.62	47.31	8.2854	36.39	0.1620

**Table S5.** Internal forces and displacement values using equilibrium finite elements

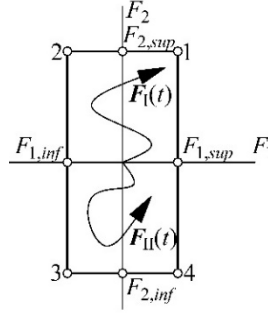
Element number	Degree of freedom	$u_{n,\max}$ mm	$N_\phi$ at $\alpha = 0^\circ$ kN/m	$M_\rho$ at $\alpha = 35^\circ$ kN m/m
4	14	21.42	8.5122	0.1698
5	17	21.43	8.4936	0.1698
8	26	21.46	8.4665	0.1700
9	29	21.47	8.4622	0.1701
16	50	21.50	8.4498	0.1702
17	53	21.50	8.4491	0.1702

This shows, that accuracy and convergence of the calculation results using equilibrium finite elements are high. Greater accuracy allows use smaller computational grid density and thus reduce the scope (reaching the desired accuracy). This is important solving stress and strain analysis and optimization task of spherical shells. The solution success largely depends on their size (i.e. the number of unknowns and constraints).

### 3. Analysis and optimization at shakedown state of spherical shells under displacement constraints

A perfectly elastic-plastic structure under repeated-variable load (RVL) is analyzed in the paper. RVL is a system of external forces  $\mathbf{F}(t)$ , every single of which (or their group) can act independently on each other in time  $t$ . Loading is assumed to be quasi-static, i.e. dynamic effects are ignored (König 1987; Mróz *et al.* 1995; Weichert *et al.* 2001). In the present paper the quasi-static loading  $\mathbf{F}(t)$  is characterized by time  $t$ . Analysis of particular

loading history  $\mathbf{F}(t)$  is avoided it must be defined by time independent upper and lower bounds  $\mathbf{F}_{sup} = [F_{1,sup} F_{2,sup} \dots F_{m,sup}]^T$ ,  $\mathbf{F}_{inf} = [F_{1,inf} F_{2,inf} \dots F_{m,inf}]^T$ , then  $\mathbf{F}_{inf} \leq \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{F}_{sup}$  (the individual load history I, II are not used e.g.  $\mathbf{F}_I(t)$ ,  $\mathbf{F}_{II}(t)$  in Fig.S6).



**Fig. S6.** The possible variation domain of two forces  $F_1, F_2$  ( $j = 1, 2, 3, 4$  – the external apexes of locus)

This definition gives a locus of loading variation – i.e. a polyhedron with a set of external apexes  $J$ , where  $j = 1, 2, \dots, p$ ,  $p = 2^\tau$ ,  $j \in J$  (Stein *et al.* 1993; Wiechmann *et al.* 2006; Atkočiūnas 2011). Here  $\tau$  – the number repeated-variable load (RVL).

The principles of the minimum complementary deformation energy (static formulation of analysis problem) and of the minimum total potential energy (kinematic formulation of analysis problem) are applied to determine true actual one stress–strain state of the structure at shakedown (Maier *et al.* 1978; Atkočiūnas *et al.* 2002; Čyras 1983; Alyavdin 2005; Atkočiūnas 2011). A complete system of equations for the stress-strain state of the elastic-plastic structure at shakedown is written as the static analysis problem constrains and for this problem are written Kuhn–Tucker conditions. Namely this complete system of equations allows for thorough analysis of the shakedown phenomenon and creating mathematical models of continuous optimization problems of structures at shakedown. Optimal shakedown design of structures will be further analyzed in the paper: when the loading is known and the searches variables of the problem are cross-section parameters  $h$  or yield limit  $f_y$  of the material (that can be achieved by optimizing the distribution of internal limit forces  $S_0$  in the structure, for example the distribution of limit axial force of the shell  $N_0 = f_y h$ ).

In this chapter pseudo-elastic variables have index  $e$ , while residual forces, deformations and displacements – index  $r$ . In further formulations of analysis and optimization problems of stress-strain states of structures at shakedown it is convenient to distinguish residual internal forces  $\mathbf{S}_r$ , residual displacements  $\mathbf{u}_r$  and deformations  $\mathbf{\Theta}_r$  (mechanics energy principles of shakedown state are associated namely with residual forces  $\mathbf{S}_r$  and displacements  $\mathbf{u}_r$ ). Equations (S2.13), (S2.15) are independent of material properties of the system, therefore for the shakedown state it is written as follows:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{S}_r &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r &= \mathbf{\Theta}_r, \\ \mathbf{\Theta}_r &= \mathbf{D} \mathbf{S}_r + \mathbf{\Theta}_p. \end{aligned} \right\} \quad (\text{S3.1})$$

$\mathbf{\Theta}_r = [\Theta_{p1} \ \Theta_{p2} \dots \Theta_{pn}]^T$  is a vector of plastic deformations.

Displacements  $\mathbf{u}_e(t)$  and internal forces  $\mathbf{S}_e(t)$  of elastic structure can be calculated using commercial package from different loads combinations. Meanwhile, in the structural mechanic task, an elastic internal forces can be calculated by using influence matrices  $\beta$  and  $\alpha$ :

$$\mathbf{S}_{e,j} = \alpha \mathbf{F}_j, \mathbf{u}_{e,j} = \beta \mathbf{F}_j, j \in J. \quad (\text{S3.2})$$

Here influence matrices accordingly (S.22) in (S2.23). Then elastic forces  $\mathbf{S}_{e,j}$  and displacements  $\mathbf{u}_{e,j}$  are determined using formulas (S3.1):

$$\mathbf{S}_{e,j} = \alpha \mathbf{F}_j, \mathbf{u}_{e,j} = \beta \mathbf{F}_j, j \in J. \quad (\text{S3.3})$$

Thus the total response due to particular load combination in the shakedown state contains elastic and residual components:

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{e,j} + \mathbf{u}_r; \mathbf{S}_j = \mathbf{S}_{e,j} + \mathbf{S}_r. \quad (\text{S3.4})$$

Because the convex yield condition will be use, it will be prevented detailed examination of the history of loading.

Nonlinear yield conditions will be verified in all three nodal points  $i = 1, 2, 3$  of each circular finite element (e.g. radius of  $k$ -th element  $\rho_k$  with nodes  $\rho_{k1}, \rho_{k2}, \rho_{k3}$ ; Fig. S2). In the element limits the cross-section height  $h_k$  is constant and the material yield point  $f_y$  is constant for all shell ( $k = 1, 2, \dots, s$ ). This way limit axial force  $N_0$  ( $f_y h_k = \text{const}$ ) is taken to be constant through the all element.

The admissibility condition of elastic-plastic internal forces for every design section (the element node)  $i$  of the discrete model of the structure is based on the non-linear strength condition (Yu 2004; Chakrabarty 2006) at shakedown:

$$\frac{16}{h^2} (M_{\rho i,j}^2 - M_{\rho i,j} M_{\varphi i,j} + M_{\varphi i,j}^2) + (N_{\rho i,j}^2 - N_{\rho i,j} N_{\varphi i,j} - N_{\varphi i,j}^2) \leq (N_{0i})^2 \quad (\text{S3.5})$$

or in matrix form

$$\varphi_i \equiv (N_{0i})^2 - (\mathbf{S}_{i,j})^T \Phi_i (\mathbf{S}_{i,j}) \geq 0 \text{ for all } i = 1, 2, \dots, \zeta, j \in J, \quad (\text{S3.6})$$

here  $N_{0i}$  denotes the limit internal forces (the membranous limit axial forces) of the  $i$ -th design section. The symmetric matrix is positive-definite, therefore, the conditions (S3.6) are convex downwards. The condition (S3.6) is homogenous, therefore, it is suitable to



apply this condition not only to the analysis and limit equilibrium problems, but also to the optimization problems of the structure's parameters.

$$\Phi_i \equiv \begin{bmatrix} 16/h^2 & -8/h^2 & 0 & 0 \\ -8/h^2 & 16/h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (S3.7)$$

Yield conditions are applicable for spherical shell at shakedown by expressing the stress vector  $\mathbf{S}_{i,j}$ . The stress vector  $\mathbf{S}_{i,j}$  obtained summing elastic  $\mathbf{S}_{ei,j}$  and residual  $\mathbf{S}_{ri}$  stresses  $\mathbf{S}_{i,j} = \mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri}$ . Then, the strength conditions of the structure can be described by the inequalities:

$$\varphi_i \equiv (N_{0i})^2 - (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri})^T \Phi_i (\mathbf{S}_{ei,j} + \mathbf{S}_{ri}) \geq 0 \text{ for all } i = 1, 2, \dots, \zeta, j \in J, \quad (S3.8)$$

So knowing that the  $\mathbf{S}(\rho) = [M_\rho M_\varphi N_\rho N_\varphi]^T$ , then the von-Mises yield criterion condition of the shell for i-th section can be write:

$$\begin{aligned} & \frac{16}{h^2} \left( (M_{\rho,ei,j} + M_{\rho,ri})^2 - (M_{\rho,ei,j} + M_{\rho,ri})(M_{\varphi,ei,j} + M_{\varphi,ri}) + (M_{\varphi,ei,j} + M_{\varphi,ri})^2 \right) + \\ & + (N_{\rho,ei,j} + N_{\rho,ri})^2 - (N_{\rho,ei,j} + N_{\rho,ri})(N_{\varphi,ei,j} + N_{\varphi,ri}) + (N_{\varphi,ei,j} + N_{\varphi,ri})^2 \leq (N_{0i})^2 \\ & i = 1, 2, \dots, \zeta, j \in J, \end{aligned} \quad (S3.9)$$

*Statically admissible* residual forces  $\mathbf{S}_r$  are such, which satisfy the equilibrium equations (S3.1) and the yield conditions (S3.8). *Kinematically admissible* residual displacements  $\mathbf{u}_r$  are such which satisfy geometric equations (S3.1)  $\mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{S}_r + \Theta_p$  and *kinematic boundary* conditions. Components of the plastic deformations' vector  $\Theta_p$  are calculated according to formula:

$$\Theta_p = (\Theta_{pkl})^T, \quad \Theta_{pkl} = \sum_j \left[ \nabla \varphi_{kl,j} (\mathbf{S}_{ekl,j} + \mathbf{S}_{rkl}) \right]^T \lambda_{kl,j}, \quad \lambda_{kl,j} \geq 0; \quad k \in K, \quad l \in L, \quad j \in J. \quad (S3.10)$$

here the expression  $\left[ \nabla \varphi_{kl,j} (\mathbf{S}_{ekl,j} + \mathbf{S}_{rkl}) \right]^T = \left[ \frac{\partial f_{kl,j} (\mathbf{S}_{ekl,j} + \mathbf{S}_{rkl})}{\partial \mathbf{S}_{rkl}} \right]$  is a gradient matrix of yield conditions (S3.9),  $\lambda_{kl,j}$  is a plastic multiplier.

Spherical shell must satisfy the strength conditions and be safe during the plastic collapse. But it is worth to mention that the residual displacement may occur from the appearance of plastic deformation, even when the external load is zero. The limit displacements must satisfy serviceability limit states. The mathematical model of distribution of internal forces of spherical shell at shakedown is:

$$\text{find} \quad \min \mathbf{L}^T \mathbf{N}_0, \quad (\text{S3.11})$$

$$\text{when} \quad \mathbf{A} \mathbf{S}_r = \mathbf{0}, \quad (\text{S3.12})$$

$$\varphi \equiv (\mathbf{N}_0)^2 - (\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{S}_r)^T \Phi(\mathbf{N}_0) (\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{S}_r) \geq 0, \quad (\text{S3.13})$$

$$\lambda_j^T \left[ (\mathbf{N}_0)^2 - \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{S}_r) \right] = 0, \lambda_j \geq 0, \quad (\text{S3.14})$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{N}_0) \mathbf{S}_r + \sum_j \left[ \nabla^T \mathbf{f}_j(\mathbf{S}_{e,j}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{S}_r) \right] \lambda_j - \mathbf{A}^T \mathbf{u}_r = \mathbf{0}, \quad (\text{S3.15})$$

$$\mathbf{N}_0 \geq \mathbf{N}_{0,\min}, \quad (\text{S3.16})$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}_{e,\min}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{\max} \geq \mathbf{u}_{e,\max}(\mathbf{N}_0) + \mathbf{u}_r, \text{ for all } j \in J. \quad (\text{S3.17})$$

A clamped shallow spherical shell under uniform pressure and the concentrated force to the rigid disk is presented in Fig. S7, where a rise height  $f_h = 100$  mm and a base distance  $L = 2r = 1,250$  m.

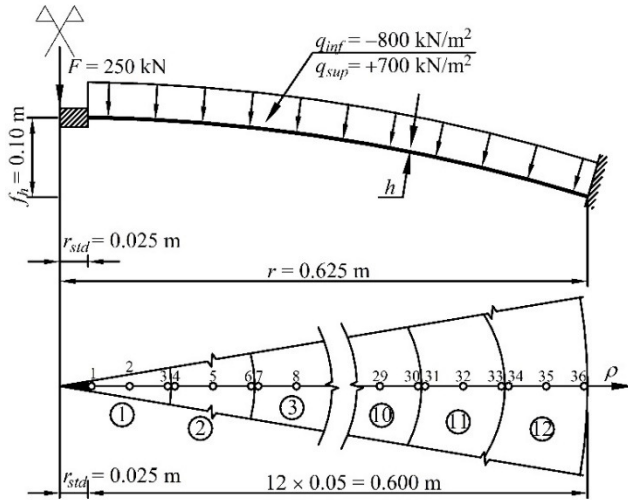


Fig. S7. A discrete model of a spherical shell of twelve finite elements

The intensity of uniform loads are  $q_{sup} = 700$  kPa,  $q_{inf} = -800$  kPa and the concentrated force is  $F = 250$  kN. The material properties are assumed:  $\nu = 0.3$ ,  $f_y = 235$  MPa and  $E = 210$  GPa.

The shell is divided into twelve circular elements of the same width. A spherical shell discrete model fragment is shown in Fig. 7. Mathematic model (S3.11)–(S3.17) is solving an iterative process. (Casciaro *et al.* 2002, Giambanco *et al.* 2004, Palizzolo *et al.* 2014).

The displacement variations have boundaries which are  $u_{min} = 2,2$  mm and  $u_{max} = 6,71$  mm of the 1st node towards the normal way. The problem (S3.11)–(S3.17) was solved. Limit axial force  $N_0$  distribution is presented in Fig. S8.

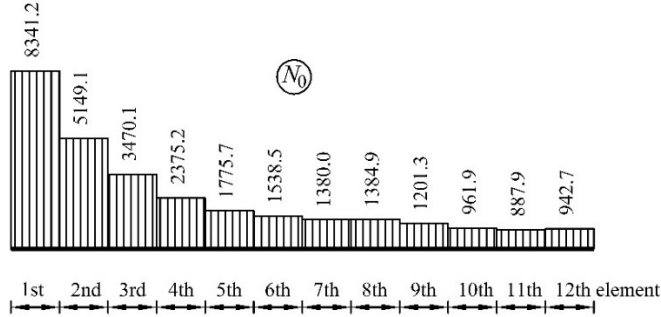


Fig. S8. The distribution of limit axial forces  $N_0$  (kN/m) of the optimal spherical shell

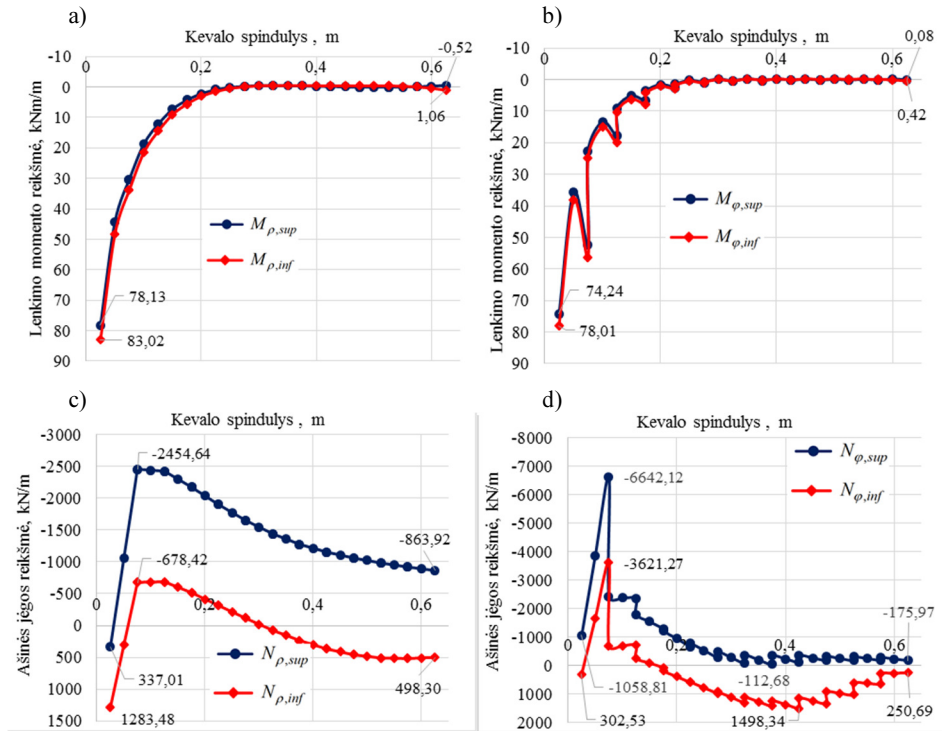


Fig. S9. The real internal forces of the optimal shell: a) bending moments  $M_{\rho}$ ; b) bending moments  $M_{\phi}$ ; c) axial forces  $N_{\rho}$ ; d) axial forces  $N_{\phi}$

In general, the distribution of residual stress  $S_r$  can be obtained not only solving optimization problem (S3.11)–(S3.17) in the rigid structure areas. Need to be set, that the distribution of the task of forces and displacements is only. The solution of the analysis problem has shown that the internal forces and displacement values shown in Fig. S9 and Fig. S9 are real one.

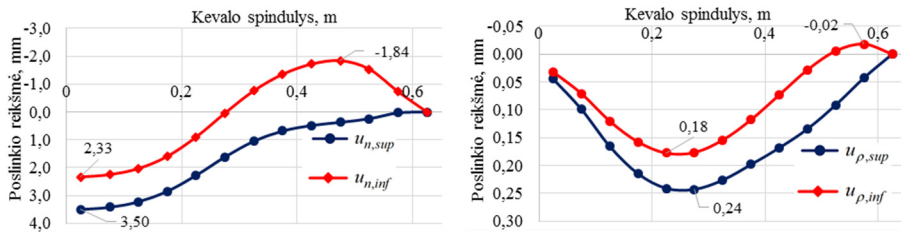


Fig. S10. The real displacements  $u_n$  and  $u_\rho$  of the optimal shell

Also the mathematical model (S3.11)–(S3.17) was solved, in which the condition  $h = \text{const}$  of discrete model was received in the shell. The results  $\min L_S N_0 = 1.225 \cdot 5135.0 = 6291.5 \text{ kNm}$  was obtained. The obvious difference (3.7 times) of objective functions show the economic benefits calculating structures (my way shallow spherical shells) for optimization different finite element thickness  $h$  (limit axial force  $N_0$ ).

## General conclusions

1. Acting effects usually are cyclical, depends on time  $t$  (acting repeated-variable load), so when design structures (in dissertation – shallow spherical shell) is necessary to estimate shakedown state.
2. The proposed new equilibrium finite element for elastic, elastic-plastic analysis of the flat, symmetrically loaded, spherical shell. The element's differential statics equations, describing the balance between the internal and external forces, are replaced with algebraic equilibrium equations, presented in the Bubnov-Galerkin method.
3. Calculation research proves, that the presented element dependencies allow the equations, describing nodal displacements of a discrete model, to be directly derived by using the stiffness matrix of the elements (similar to the method of the displacement elements).
4. The performed computational analysis, using the mesh of the elements of various density, has shown that the accuracy and convergence of the calculation results are high compared with Hinton's works. This is particularly important for the analysis of the elastic-plastic shells and for solving the optimization – nonlinear programming problems, whose solution success largely depends on their size (the number of elements).

5. Results analysis of stress and strain state was performed. The one case shell limit axial force  $N_0 = \text{const}$  in all shell and other  $-N_{0,k} = \text{const}$  only in element of all shell. The results,  $\min L_S N_0 = 6291.5 \text{ kNm}$  and  $\min \mathbf{L}^T \mathbf{N}_0 = 1867,8 \text{ kNm}$ , show, that is very important for each finite element thickness optimization (saving more than 3 times the material). However, it is worth noting that the task single-parameter internal forces 2–6 times is less, than internal forces obtained using mathematical model (S3.11)–(S3.17).
6. Numerical experiments have demonstrated the possibility created mathematical models of optimization to begin the steel structures revise under cyclic-plastic collapse.



---

## Priedai<sup>1</sup>

**A priedas.** Tampraus kevalo skaičiavimo uždavinių sprendimo rezultatai

**B priedas.** Tampriai-plastinio kevalo skaičiavimo uždavinių sprendimo rezultatai

**C priedas.** Prisitaikiusio sferinio kevalo uždavinių sprendimo rezultatai

**D priedas.** Bendraautorių sutikimai teikti publikacijose skelbtą medžiagą mokslo daktaro disertacijoje

**E priedas.** Autoriaus mokslinių publikacijų disertacijos tema kopijos

---

<sup>1</sup>Priedai pateikiami pridėtoje kompaktinėje plokštelėje

Tomas ULITINAS

SFRERINIO KEVALO OPTIMIZAVIMAS  
PRISITAIKOMUMO SĄLYGOMIS

Daktaro disertacija  
Technologijos mokslai,  
statybos inžinerija (02T)

Tomas ULITINAS

OPTIMAL SHAKEDOWN DESIGN OF  
SPHERICAL SHELL

Doctoral dissertation  
Technological Sciences,  
Civil Engineering (02T)

2014 12 23. 15,75 sp. l. Tiražas 20 egz.  
Vilniaus Gedimino technikos universiteto  
leidykla „Technika“  
Saulėtekio al. 11, 10223 Vilnius  
<http://leidykla.vgtu.lt>  
Spausdino UAB „Baltijos kopija“  
Kareivių g. 13B, 09109 Vilnius